Examensarbete

HÖGSKOLAN I SKÖVDE

Magiska ögonblick och förlorade möjligheter

En studie i möjligheterna att lära med utgångspunkt i elevernas förkunskaper, svårigheter med lärandeobjektet och variationen i det erbjudna lärandet.

Magical moments and missed opportunities

A study of opportunities to learn on basis of students' prior knowledge, difficulties of learning object and the variance of the offered learning.

Examensarbete inom huvudområdet i pedagogik
Avancerad nivå 15 Högskolepoäng
Vårtermin 2011

Namn: Susanne Andersson Bustad

Handledare: Ulla Runesson och Kennert Orlenius

Examinator: Jörgen Dimenäs

Förord

Jag vill tacka mina handledare som på olika sätt har hjälpt mig i mitt arbete med min magisteruppsats. Utan handledning och stöttning hade jag haft svårt att fortsätta mitt arbete. Jag är Er väldigt tacksam för Era infallsvinklar och kritiska ögon. Jag vill även rikta ett stort tack till de elever som ställde upp och som inte gav upp under intervjuerna, utan stod ut med alla mina nyfikna frågor. Era utsagor blev en skattkista att ösa ur och som fick mig att tänka till, inte bara en utan två gånger i vad det är som gör att Ni lär av det erbjudna lektionsinnehållet. Ett mycket stort tack till Er båda för att Ni delade med Er av Ert lärande.

Slutligen ett tack till min man och mina barn som stått ut med mig hängandes över materialet och datorn. Lite för ofta, har jag hörts muttrande. Så mycket tack, för att Ni stod ut med mig under denna tid.

Jag är Er alla oerhört tacksam!

Allt har sin tid, även denna uppsats.

Susanne Andersson Bustad

Abstract

Study: Advance degree project in main subject pedagogic , Advanced level, 15 hp
University of Skövde
Author: Susanne Andersson Bustad
Title: Magical moments and missed opportunities. A study of opportunities to learn on basis of students' prior knowledge, difficulties of learning object and the variance of the offered learning.
Tutor: Ulla Runesson och Kennert Orlenius
Date: April 2010
Number of pages: 66
Keywords: Prior knowledge, difficulties, offering learning, equations, variation theory, variation patterns, experienced learning. I use the following words synonymous with each other; prior knowledge and prior understanding, difficulties and critical aspects, offered learning and produced learning, experiencing and learning new skills (both mean to experience something in a different way than before).

This study is based on an interest in trying to understand what is needed to ensure that students actually learn in a learning object, in this study equations. Algebra is an area of mathematics in several studies proved to be a stumbling block for many students. Using letters in mathematis is difficult for most students according to research reports and it is also consistent with my own experince as a teacher. The purpose of this study was to seek answers to what in the lesson content and also during the interview that allowed the students to learn more about the learning object. Based on students' prior knowledge and the difficulties students might have with the learning object and the offer of learning, I try to get an answer to what might have contribut the students to developed knowledge of the learning object. This qualitative study is based on a variation theory perspective. The two students who participated in the study attended the same class in high school. By using the theory of variation patterns, it made it possible for me to describe how students learn new things about the learning object, equations. To gain insight into how the students solved the data and developed new knowledge, I had the lesson content and their statements in the interviews to help me understand the difficulties in solving the equtionatask and what in the lessons that have contributed to new knowledge. The results show that pupils' understanding and difficulties in learning objects are relevant to how they can perceive, discern and assimilate new knowledge. One student was able to experience learning from their prior knowledge and assimilate what he had to develop in the variety in the offer of learning. The offered learning did not give the second student the same opportunity. The results indicates that the knowledge of students' prior knowledge, the difficulties the learning object can create and students' own narrative, I argue on the basis of the study's results, it is important knowledge for every teacher to be aware of befor the presentation of the lesson if it will give every student opportunities to learn.

Innehållsförteckning

Inledning

I inledningen tar jag upp studiens bakgrund, tidigare forskning inom algebra, samt val och syfte med studien.

Studiens bakgrund

För drygt sex år sedan påbörjade jag min tjänst som specialpedagog inom de nationella programmen på ett gymnasium i Västsverige. Tjänsten som specialpedagog på gymnasiet, innebar för min del att arbeta för och med elever i svårigheter. Av alla de ämnen som eleverna läser på gymnasiet, är det främst ämnet matematik som eleverna fick svårigheter i. Detta visade sig i att lärare oftast rådgjorde om hjälp och stöd för elever i ämnet, samt att elever själva bad om stöd i matematik. Detta gjorde att mitt uppdrag till stor del kom att bestå i att ge stöd till elever i matematiska svårigheter. Under mina dryga sex år på gymnasiet är min erfarenhet att en allt för stor grupp av elever uppvisat brister i matematiska färdigheter och algebran har varit en av stötestenarna. Eleverna har fått störst svårigheter i att nå godkända resultat inom områden där bokstavsräkning ingått och då främst inom ekvationer, men även inom geometri.

Underkända resultat, ett ökat tryck från eleverna själva i att vilja få mer undervisning i att lösa ekvationer samt svårigheter i att kunna omsätta och använda ekvationslösningen vid uppgifter hänvisade till formelbladet tyder på att undervisningen inte varit tillräckligt i att möjliggöra lärande för många av våra elever. I läroplanen för de frivilliga skolformerna, Lpf 94,står det att läsa att alla som arbetar i skolan skall hjälpa elever som har behov av särskilt stöd och samverka för att göra skolan till en god miljö för lärande, samt att undervisningen skall anpassas till varje elevs förutsättningar och behov. ”Det väsentliga är att skolan skapar de bästa samlade betingelserna för elevens bildning, tänkande och kunskapsutveckling” (Lpf 94 s.6). Vad innebär det att anpassa undervisningen till varje elevs förutsättning och behov, samt hur klarar vi som lärare att verkställa målet? För mig blev svaret på denna fråga en ny fråga; Är anpassning till varje elevs förutsättningar och behov samma som att kunna skapa förutsättningar i undervisningen som möjliggör lärandet för varje elev? Och i så fall hur skapar vi förutsättningarna som möjliggör lärandet för varje elev?

Rektor, specialpedagog och lärare har ett gemensamt ansvar för elevers utbildning. Specialpedagog och lärare kan tillsammans, genom samarbete planera undervisning som kan möjliggöra att elever lär det vi avser att de ska lära. Enligt min erfarenhet, utifrån en learning study, skapade samarbetet ett bättre utgångsläge för alla parters förståelse av vad det är som kan göra att elever kan få svårigheter. Detta i sin tur öppnade upp för sökandet efter fler alternativa och varierande lektionsinnehåll i undervisningen. Längre fram i texten återkommer jag till den gjorda learning studyn.

Samarbete kring undervisningen har allt för sällan förekommit. Det kan bero på en mängd olika saker som exempelvis känslan av tidspress och ovanan att diskutera sin undervisning och sina erfarenheter. På matematiklärarnas ämneskonferenser vet jag av erfarenhet att det har varit en avsaknad av ett givande och tagande av erfarenheter i och om lärande. Det har varit sällsynt att lärarna tagit del av varandras undervisning i form av lektioners upplägg, innehåll och hur undervisningen genererar lärande. Nuthall (2004) hävdar att läraren måste förstå hur deras eget agerande i lektionsupplägg, utförande och val av uppgifter påverkar den lärande och det som händer i den lärandes huvud. Det är viktigt att se hur lärandet hänger samman med elevernas förkunskaper och innehållet i undervisningen. I samtal i och om lektionsinnehåll och elevers kritiska aspekter av ett tänkt lärandeobjekt, har vi lärare större förutsättningar att utveckla den egna undervisningen och få "syn" på vad som kan möjliggöra elevernas lärande. I läroplanen under rektors ansvar står att läsa att rektorerna har ett särskilt ansvar för att "… utbildningen organiseras så att elever kan börja på en nivå i respektive ämne som bestäms av deras förkunskaper och avsluta den efter de studier som svarar mot den enskildes behov…(s.17)

Gymnasieskolan är en frivillig form och för att var behörig sökande till ett nationellt program krävs ett godkänt betyg i de tre kärnämnena matematik, engelska och svenska. Den förförståelse eleverna har med sig, ser olika ut hos var och en av dem beroende på vad de tidigare har getts möjlighet att lära och utveckla. Även om eleverna har med sig minst ett G i betyget i matematik så har jag och mina lärarkollegor, uppmärksammat att ett betyg står för väldigt olika utvecklade kunskaper. Allt för ofta har jag hört att elever som fått matematiska svårigheter uttryckt att de "inte fattar", vilket jag tolkat är ett uttryck för svårigheter i att förstå och möjligheterna till lärandet har uteblivet. För att kunna lära någonting behöver eleverna ha en förförståelse för det de ska lära, samt ges möjligheten att förstå utifrån sina förkunskaper. Det finns en relation mellan undervisning och lärande, och för att förstå den behöver lärarna förstå hur individens beteende och förståelse byggs upp av hur läraren lägger upp, fastställer och genomför lektionen och hur de tre olika sociokulturerna (förhållandet mellan eleverna, elevernas egen uppfattning och elevernas tidigare erfarenheter) påverkar förhållandet i klassrummet, samt hur varje elev gör för att förstå och lär av innehållet i undervisningen (Nuthall, 2004). Lärare gav uttryck för att elever inte förstod vilket jag tolkat kunde stå för att eleven ägde bristerna och inte undervisningsinnehållet.

Både elevers och lärares uttryck av att de inte förstår, kan tolkas som ett behov av att det behövs en ökad kunskap om förhållandet mellan undervisning och lärandet. Lärarna har i sin undervisning en avsikt att eleverna ska lära sig och för att ge eleverna möjligheter att lära måste läraren få syn på sambanden mellan varje elevs förkunskaper och förförståelse, det eleverna erbjuds lära och slutligen utvärdera vad de faktiskt lär. Eleverna lär när de utvecklar något nytt eller utvecklar sina tidigare kunskaper, vilket gör att läraren behöver ha kunskap om elevernas förförståelse och vad det är som gör att eleverna lär (Marton & Booth 2000, Runesson 2005, Marton & Tsui 2004).

Min tolkning är att lärare planerat sina lektionsupplägg utifrån vad eleverna ska ha kunskap i/om med utgångspunkt i kursplanemålen och läroplanen. Följande står att läsa i kursplanen för Ma A som inrymmer algebra:

Eleven skall

- vara så förtrogen med grundläggande geometriska satser och resonemang att hon eller han förstår och kan använda begreppen och tankegångarna vid problemlösning
- kunna tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner som krävs för problemlösning i vardagslivet och i studieinriktningens övriga ämnen
- kunna ställa upp och tolka linjära ekvationer och enkla potensekvationer samt lösa dem med för problemsituationen lämplig metod med lämpliga hjälpmedel

Elevernas förkunskaper eller förförståelse har enligt min erfarenhet, allt för sällan bidragit till upplägget av lektionsinnehållet för att nå kursplanemålen, men elevernas efterkunskaper av lektionsinnehållet har alltid varit betygsunderlag. Oavsett förkunskaper har elever förväntats lära och resultatet på prov har visat att vissa elever inte har nått den förväntade kunskapen, läraren hade för avsikt att de skulle lära. Elevernas uteblivna möjlighet att lära kan, enligt min erfarenhet, ha sin grund i att innehållet i lektionsupplägget inte har möjliggjort för eleverna att lära utifrån sina förutsättningar och därmed deras egen förförståelse. Fokus har legat på vad eleverna ska lära sig *inte* vad som krävs för att lära sig ”detta” och vilka förkunskaper/förförståelse eleverna har inför ”detta”. Förkunskaperna har betydelse för elevernas lärande och Wernberg (2009) visar på vikten av att utgå från elevernas faktiska förkunskaper inom ett lärandeobjekt, vilket också Marton & Booth(1997); Runesson (1999; 2000; 2004; 2005), Wernberg (2009) ; Persson (2010) och Holmqvist (2001) också framhäver i sina studier. För att nå lärandeobjektet måste man ta reda på elevernas förkunskaper och se vilka svårigheter, s.k. kritiska aspekter som finns för lärandet. Forskning visar på vikten av att söka reda på elevernas förkunskaper inför lektionsinnehållet och på det sättet få en större förståelse för vad som krävs för att lära och skapa lektionsinnehållet utifrån det. Kunskapsmål är ett normativt ställningstagande som Wernberg (2009) uttrycker, och signalerar vad eleven förväntas kunna, men lärarna måste förstå relationen mellan undervisning och eleverna och den effekt detta får för elevernas lärande.

Tidigare forskning inom algebra

Kieran, C. (2007) och Häggström (2008) belyser att det saknas forskning om algebra undervisning. Den litteratur som handlar om matematikundervisningen tar inte upp betydelsen av innehållet i algebraundervisningen och dess påverkan på lärandet samt på vilka sätt aritmetik och geometri är av betydelse för lärande av algebra. Matematikens symbolspråk är algebran, en övergång från siffror till bokstäver. Många elever får här svårigheter och tappar intresse för matematik när algebran behandlas i skolan. Häggström (2008) poängterar att algebran är ett kritiskt område i skolans matematik, och att det är en brytpunkt i matematiken i övergången från aritmetiken till algebra.

> In arithmetic you deal with problems where you can start with known numbers and work towards the unknown (answer). All operations are performed on particular numbers. In algebra you often operate and handle relations between indeterminate numbers (ibid, s.13).

Författaren har i sin avhandling studerat matematiklektioner i algebra och jämfört kinesiska och svenska lärares sätt att undervisa om linjära ekvationssystem. Resultatet visar att det är tydlig skillnad mellan de kinesiska lärarnas lektionsinnehåll och de svenska lärarnas. De kinesiska lärarna skapar fler kontraster och variation i sitt lektionsinnehåll, som ger fler möjligheter att urskilja fler aspekter av innehållet. Häggström studerade de bakgrundsfaktorer som lärarna har kontroll över så som undervisningsmaterialet, upplägget av undervisningen, samt genomförandet av den samma och vad det är vi tar för givet när vi undervisar. Utgångspunkterna i avhandlingen är att det finns en relation mellan lärande och undervisningen samt att hur innehållet behandlas, har betydelse för de lärande. I sina resultat resonerar författaren om det som vi lärare många gånger omedvetet tar förgivet i undervisningen och som i sin tur kan vara kritiskt för lärandeobjektet. För att de lärande ska få möjligheter att utveckla sitt lärande krävs en medvetenhet om vilka de kritiska aspekterna av lärandeobjektet kan vara. Vi ska inte ta viktiga saker för givna utan istället öppna upp för en dimension av variation som ger de lärande större möjligheter att lära och förstå. Häggström lyfter fram ett exempel som speglar det nyss nämnda som att få eleverna att förstå att x kan bytas ut mot andra symboler men ändå svara mot samma siffra eller att x är samma siffra trots dess olika placeringar i uppgiften. När saker hålls konstanta i undervisningen blir det mycket svårare för eleverna att urskilja, medan saker som varierar är lättare att upptäcka. Genom variation får de lärande möjligheter att få syn på kontraster i skillnader och likheter.

Goda kunskaper i algebra har betydelse för hur eleverna lyckas med matematiken både på gymnasiet och för högre studier. Persson & Wennström (2002) ville i sin studie undersöka vad i algebrainlärning och undervisning som kan förbättras för att ge eleverna bättre förutsättningar. De kom i sin studie fram till att det finns viktiga förkunskaper som är av betydelse för lärandet av algebra: god talförståelse, god förståelse för variabelbegreppet samt användbarheten av bokstäver. Eleverna hade bristfälliga förkunskaper vilket gav dem fortsatta svårigheter i arbetet med algebra. Svårigheterna hävdar de bottnar i brister i aritmetiska färdigheter, låg abstraktionsnivå och det logiska tänkandet. En möjlighet för eleverna att komma vidare i sitt lärande är att utgå från varje elevs individuella förutsättningar, samt vilka hinder som kan försvåra respektive underlätta inlärningen. Författarna understryker att elevens tankegångar, att de får möjlighet att berätta hur de tänker och jämföra med hur andra tänker samt får prova på andra angreppssätt, bidrar till elevens matematiska utveckling. De hänvisar till Vygotskys och språkets betydelse för tänkandets betydelse i lärandeprocessen.

Vygotsky, tolkad av Persson (2005), ser aritmetiken som en parallell till talspråket och algebran som en parallell till skriftspråket, och att algebran representerar en nyare och högre utvecklingsplan i det abstrakta tänkande. Algebran höjer det aritmetiska tänkandet och omstrukturerar därmed talspråkets tidigare etablerade psykologiska system.

Författaren menar att Vygotskys tanke att aritmetiken föregår algebran, inte kanske är riktigt så enkel och menar att de problem som elever har med både aritmetiken och algebran kan bottna i problem med syntaxen eller förmågan att skilja aritmetiska uttryck och påståenden från algebraiska uttryck och påståenden. Kunskap kan utvidgas genom att uppbåda språket som en resurs. Tid för lärande behövs enligt författaren samtidigt som han undrar över om effektiv tid kan kompensera brister i elevens förutsättningar. Utvecklingen av förståelsen måste börja där eleven befinner sig och uppmärksamma se på sambandet mellan elevens lärande och lärandemiljön. De algebraiska procedurer som eleven inte kan relatera till informella och meningsfulla sammanhang skapar svårigheter hos eleverna. Det blir en abstrakt nivå på vilken problem ska lösas och i jämförelse med de konkreta situationer de kommer från, skapar brist på mening som eleven lägger i de matematiska objekten på den abstrakta nivån.

Sedan 1995 har det varit en negativ trend som visar att svenska elever, både i årskurs fyra och i årskurs åtta, ligger under EU/OECD-snittet i matematik. Svenska elever i årskurs åtta presterade under EU/OECD-genomsnittet i matematik och den negativa utveckling som kunde påvisas mellan 1995 och 2003 har fortsatt, vilket TIMSS 2007 visade. De största problem som svenska elever har i matematik i TIMSS-studien, rör algebra och geometri för årskurs åtta (TIMSS 2003; 2007). TIMSS-studien utgår från kursplanens matematik och PISA testar den matematik som behövs för att klara vuxenlivet. I PISA-rapporten (2003) visade OECD-genomsnittet att de svenska eleverna låg något bättre till inom området Förändringar och samband, dvs. funktioner, algebra och statistik. Däremot i resultaten från den tredje PISA-studien, 2007, hade resultaten försämrats. De svenska resultaten hade då sjunkit till en genomsnittlig OECD-nivå. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) studerar elevers kunskaper i naturvetenskap och matematik internationellt och utgår från nationella läroplaner i deltagande länder och försöker hitta gemensamma nämnare, som leder till en konstruerad läroplan. Undersökningen genomförs under det fjärde respektive det åttonde skolåret. PISA (Programme for International Student Assessment) är också den en internationell studie men för femtonåringar och utvärderar elevprestationer genom att mäta det som eleverna har nytta av att kunna i sitt vuxna liv. Jag har valt att lyfta fram TIMSS för skolår 8 och PISA för 15-åringar då de vänder sig till elever i ungefär samma ålder som ingår i min studie och för att se vad forskning visat gällande elevernas kunskaper i algebra inför gymnasiet. Kunskapsresultaten har visat sig sjunka och svenska elever hade presterat sämre inom området algebra.

Elever kunskapsresultat i matematik har försämrats enligt rapporter från TIMSS och PISA, vilket också Bergsten (et al 1997) och Pehrson (2002) hänvisar till samt poängtera att svenska elever presterat mindre goda resultat i algebra vid internationell jämförelse. Pehrson har själv erfarenhet av att elever har svårigheter i algebra på gymnasiet liksom på vuxenutbildningen. En del kunde bero på, som de studerande själva angav, att de inte läst algebra i grundskolan. Bergsten (1997) fortsätter och säger att matematiken är ett av skolans viktigaste ämne.

”Det algebraiska språket är ett standardverktyg för att hantera precisa tal och funktioner, och en grund för vidare studier. Därför är det viktigt att alla ges möjlighet att lära sig hantera detta språk” (ibid., s.9). Algebra är inte som aritmetiken framväxt ur verkligheten och om algebran ska vara möjlig för alla behöver den göras levande och attraktiv. Det algebraiska tänkandet skiljer sig från det aritmetiska där det aritmetiska uppmärksammar tal och genomför operationen medan det algebraiska innebär en betraktelse av själva operationen av tal och arbetar därmed på aritmetikens struktur. För att klara hanteringen av algebra i skolan krävs att man kan växla mellan att se ett begrepp/symboluttryck som en operation eller som ett objekt/en struktur. Tidigare studier inom algebraundervisning pekar på att uppfattning av bokstävernas och likhetstecknets betydelse är två speciellt viktiga faktorer för förståelse för att lösa ekvationer. Att tolka likhetstecknet innebär att förstå att tecknet kan läsas både från vänster till höger och tvärtom, samt att båda leden finns samtidigt och likhetstecknet anger att det råder en balans mellan de båda leden. Algebra, det matematiska symbolspråket, menar författarna förenklar arbetet med att lösa problem, se samband, resonera och kommunicera.

Forskningsrapporter och otaliga artiklar hävdar att matematik är en viktig förutsättning för samhällets tillväxt och utveckling i den allt snabbare globaliseringen samt att industri och näringsliv vill ha arbetskraft med goda och relevanta kunskaper inom matematik. Studenters försämrade kunskaper i matematik får konsekvenser för utbildningar som vilar på matematisk grund (Olteanu, 2007). Olteanu hävdar även hon i sin studie att elevers prestationer i andra ämnen påverkas av svårigheter med algebran. Författaren har studerat framställningen av det matematiska innehållet i klassrummet och elevernas lärande utifrån det variationsteoretiska perspektivet i ett försöka att identifiera de variationer som öppnas upp eller begränsar objektet för lärande. Enligt Olteanus visar studier av andra forskare att svårigheter med ekvationer och funktioner kan kopplas till övergången från aritmetik till algebra, ekvivalens av algebraiska uttryck och termerna som förekommer i ett algebraiskt uttryck. Hon lyfter också fram att andra forskare med den variationsteoretiska ansatsen anger att de mönster av variation som används i undervisningen återspeglar det de lärande lär. Symbolerna får en betydelse för elevernas lärande i form av hur dessa symboler relateras till varandra i lärandet av att lösa en andragradsekvation och att använda sig av en andragradsfunktion. Resultat av Olteanu studie är att det är den konvergenta variationen som leder till att eleverna utvecklar sitt lärande genom dessa variationer i att det möjliggörs en urskiljning i att något varieras och något är konstant vilket leder till ett mer fullständigt lärande. Det gör det möjligt för eleverna att göra generaliseringar inom lärandeobjektet och mellan lärandeobjekt (ekvationer och funktioner). Det erbjudna innehållet i undervisningen återspeglar i hög grad vad eleverna lär.

Studiens syfte och frågeställning

Algebra och svårigheter som räkning med bokstäver skapar inom matematiken, möts jag allt för oftast av i mitt arbete med elever. Vilka svårigheter kan elever ha inom området algebra? Vad i innehållet under lektionerna gör att eleverna utvecklar sitt lärande inom området? Mitt val av studie ligger i intresset att vilja förstå vad det är som kan möjliggöra att eleverna faktiskt lär och i detta fall inom området algebra.
Rapporter från PISA och TIMSS betonar att flera studier, både nationellt och internationellt visar att matematiken för de svenska eleverna har försämrats under de senaste åren. Momentet algebra har visat sig vara en stötesten för många av eleverna enligt forskningsrapporterrapporterna. Min egen erfarenhet överensstämmer med forskningsrapporterna om att bokstavsräkning hör till det område inom matematiken som flest elever får svårigheter i. Den tidigare forskningen lyfter också fram matematiken som en viktig förutsättning för att verka i samhället och i den allt snabbare globaliseringen. Kunskaper i algebra har betydelse för hur eleverna lyckas med matematiken både på gymnasiet och för högre studier, samt att industri och näringsliv efterfrågar arbetskraft med goda och relevanta kunskaper inom matematik. Ungdomars försämrade kunskaper i matematik kan få konsekvenser för utbildningar som vilar på matematisk grund samt för fortsatt yrkesliv. Min förhoppning är att studien kan bidra till att visa hur elever kan ges möjligheter att lära om ekvationer och vilken betydelse förkunskaper och det erbjudna lärandet har för just lärandet.

Syfte

Syftet med studien är att söka svar på vad i undervisningen som kunde ha möjliggjort att eleverna erfor ett lärande. Genom att utgå från deras förkunskaper och de svårigheter de visade på förtestet och se vilka förutsättningar som skapades under lektionerna och under intervjuerna ska jag försöka få svar vad som kunde bidragit till att eleverna utvecklade ny kunskap om lärandeobjektet. Som jag tidigare nämnt, så utgår min studie från en learning studie där elevernas förförståelse testades genom ett förtest och sedan gör lärarna en planering utifrån det, det s.k. tänkta lärande. Innehållet i lektionen ger sedan eleverna möjligheter till lärande, det s k erbjudna lärandet och avslutningsvis görs ett eftertest (samma som förtestet) för att se vilket lärande eleverna utvecklade i lärandeobjektet. Det jag intresserar mig för är elevernas förkunskaper och de svårigheter de visade på förtestet och det de berättade om under intervjun efter förtestet, samt vad i lektionsinnehållet och intervjun efter lektionerna, som gör att de utvecklar nya kunskaper kring lärandeobjektet. Det tänkta lärandet och lärarnas uppfattningar eller kunskaper kommer inte att analyseras. Det tänkta lärandet är en del av planeringen inför de lektioner jag analyserar, men mitt fokus är elevers förförståelse och svårigheter samt utvecklade kunskaper efter erbjudit lärande. Till min hjälp i analysen och beskrivning av hur lärandet erbjuds och erfors har jag tagit hjälp av det variationsteoretiska perspektivet. Lärandeobjektet var ekvationer i den gjorda learning studyn, som jag och två kollegor genomförde.

Ekvationer blir också det lärandeobjekt jag analyserar och relation mellan det framställda lärandeobjektet och det lärda innehållet.

Frågeställning

1. Vilka förkunskaper (förförståelse) kan eleverna ha av att lösa ekvationen?
2. Vilka svårigheter får eleverna vid lösning av ekvationen?
3. Vad i det erbjudna lärandet kan möjliggöra att elever utvecklar ny kunskap i att lösa ekvationen?

Teoretisk utgångspunkt

Undervisning och lärande

Undervisning och lärande är två sidor av samma mynt. Att studera undervisning i relation till elevernas lärande med fokus på innehåll kan göras med utgångspunkt i erfaranden som lärare och elever går igenom tillsammans. Detta ställningstagande karakteriseras av att vara icke-dualistiskt, vilket enligt Marton och Booth (1997) innebär att undervisning och lärande betraktas som delar som är intimt sammanbundna med varandra till samma erfarandevärld, det vill säga att lärare och elev relaterar samma undervisningsinnehåll. Människor är olika och världen framstår olika för olika människor och människor lär sig saker på vitt skilda sätt.

> … in order to learn about something you have to have some idea of what it is you are learning about (ibid, s. viii)

Det är fyra aspekter enligt SOU (1992:94) som är av betydelse för undervisning och lärande. Skolan ska för det första eftersträva en historisk förståelse av innehållet i undervisningen för att kunna förmedla en förståelse för kunskap till de lärande. Den andra aspekten är att skolan ska anpassa lärandet till varje elev genom att erbjuda en variation av utbildningsvägar och arbetssätt, och för det tredje att fokusera på det lärande som är svårt för eleverna att tillägna sig utanför skolan. Den sista aspekten handlar om att anpassa undervisningen utifrån elevernas behov och möjligheter och ha fokus på att få eleverna att lära. Utbildning ska vara en aktiv process där eleven är med och delger sitt lärande och därmed sina vägar till kunskap.

Av tradition undervisas elever i matematik med hjälp av läroboken och det är den som styr undervisningen. Det är svårt att uppnå målen i matematik eftersom den traditionella undervisningen gör eleven mer passiv i sin kunskapsinhämtning när inlärning sker genom att lyssna, läsa och öva i boken (Maltén, 2003). Teorin om att eleven är en passiv inhämtare av kunskap faller in under inlärningsteorin där människans kunskaper anses komma från yttre stimulus. Människan är enligt inlärningsteorin från början, med undantag från några medfödda reflexer, ett oskrivet blad och all kunskap lärs in genom tillförandet av fakta. Malmer (2002) anger att laborativa och undersökande moment förekommer allt för sällan i grundskolan och undervisningen blir då för abstrakt och otillgänglig. Författaren menar att både språkligt och erfarenhetsmässigt hamnar undervisningen i matematik långt ifrån elevernas vardag och verklighetsförankring. Matematiken upplevs av eleverna som svår och de förstår inte meningen i det som sker och tappar då motivationen. Författaren poängterar att man kan anpassa undervisningen till eleverna genom att använda sig av deras förkunskaper och gå från det de vet till nya kunskaper.

Nuthall (2004) uppfattar att lärares fokus oftast ligger på elevernas delaktighet d v s hur de uppför sig, den motivation och förmåga de uppvisar i att avsluta en aktivitet istället för vad de faktiskt lär. Författaren skriver vidare att undervisningen hänger samman med det de lärande lär. Det Nuthall anger, tolkar jag som en samsyn av Vygotskys tankar, att lärarna måste försöka förstå elevernas tänkande för att kunna vägleda och se lärandemiljöers betydelse för lärandet. Vygotsky har sina rötter i den kognitiva teorin och han ansåg att undervisningen är i centrum för utveckling. Människan har avsikter med sitt beteende och hon är i grunden en aktiv varelse. Läraren måste förstå att deras agerande, lektionsupplägg, uppförande och uppgifter påverkar den lärande och det som händer i hans/hennes huvud. Det är endast när lärare förstår hur deras egna agerande formar den lärandeprocessen som det möjliggörs effektivt lärande. Skolverket (1999) menar att utgångspunkten ska vara eleven och han/hon ska vara i centrum för lärandet.

Holmqvist (2006); Runesson (1999) uttrycker att undervisningen av tradition har genomsyrats av att lärarna haft fokus på vilka metoder som kan användas i undervisningen för det stoff som ska läras ut, när det borde var lärandet i sig som ska genomsyra allt som lärarna arbetar med i skolan. Enligt författarna nämner lärarna sällan det som borde vara det centrala för läraren nämligen vad eleverna ska lära sig och hur de kan ges möjlighet att lära sig detta. Lärarna är inte generellt orienterad mot specifika inlärningsmål, kunskaper, färdigheter och förståelse som eleven ska uppnå. Författarna menar att lärarnas undervisningshandlingar, oavsett om de är medvetna och reflekterande handlingar eller inte, så ses handlingarna som den potential de har för att forma elevernas medvetenhet. Undervisningshandlingarna ger den innebörd eller den mening eleverna erbjuds eller har möjlighet att erfara. Medvetandet är strukturerat och organiserat i ett visst ögonblick och det vi erfar skapar förändring och en förändring i medvetandets struktur medför att vi lär. Bergsten (1997) betonar på värdet av att använda fler uttrycksformer och att kunna uttrycka en situation på olika sätt.

Det tidigare perspektivet på *hur* håller enligt Carlgren och Marton (2007) på att övergå till *vad* – kultur. Skiftet från hur till vad innebär att fokus flyttas till vad som krävs för att erfara och lära. Variationsteorin är en teori som ser till formen av variation – vad - i undervisningen som möjliggör en positiv utveckling av elevers förmågor och kompetenser. Det är ett perspektivbyte från hur lärande sker, till vad lärande innebär och lärandets innehåll och struktur lyfts fram (Marton & Booth, 2000). Det mest grundläggande i lärandet är att erfara ett fenomen och den mening det har för oss. Lärande är att lära sig erfara och att sätta ord på sitt erfarande innebär att man kan gå utanför sitt eget kunnande. Det är utifrån helheten som eleverna lär och saknas helheten kan lärandet utebli. Lärandeobjektet måste framträda för eleven för att lärande ska ske, samt att lärandet ska utgå från elevernas erfarande. Författarna lyfter fram att människans förmåga i att vara medveten om sin omvärld vid ett och samma tillfälle kan bidra till att förändra vårt sätt att erfara något.

Variationsteorin

Variationsteorin utvecklades främst av Marton under 1990-talet och har sedan vidareutvecklats. Den kan beskrivas som en teori om lärande som har vuxit fram ur den fenomenografiska ansatsen i frågor som berör lärande och undervisning (Bowden 1994; Runesson, 1999; Marton & Booth, 2000; Emanuelsson, 2001; Marton, Runesson, & Tsui, 2004; Holmqvist 2006). Tre teoretiska begrepp är centrala i variationsteorin; urskiljning, samtidighet och variation. De tre begreppen innebär att människan urskiljer olika saker samtidigt i sitt medvetande, där struktur och mening är sammanbundna med varandra.

> Variation mellan skilda sätt att erfara någonting är då en följd av det faktum, att skilda aspekter eller delar av helheten urskiljs eller inte urskiljs och är eller inte är föremål för ett fokuserat medvetande samtidigt (Marton &Booth, 2000, s. 148).

Vi kan inte hålla reda på flera innehållsaspekter samtidigt en längre tid, utan det är vissa saker i vår omvärld som framträder och andra bildar bakgrund. När vi blir medvetna om vår omvärld vid ett och samma tillfälle kan det bidra till att förändra vårt sätt att erfara något. Det är variationen i att förstå och tänka om samma innehåll som är utgångspunkten för ett mångfacetterat och dynamiskt lärande (Bowden, 1994; Runesson 1999; Marton & Booth 2000). Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv sker lärandet i relationen mellan hur den som lär sig erfar sin omvärld. Runesson (1999, 2005) och Marton & Booth (2000) menar att när olika dimensioner av variation öppnas i undervisningssituationen skapas ett utbud, en rymd av variation. Innehållet i variationsrymden avgör innebörden och den mening som är möjlig för eleverna att erfara. Lärarens och elevernas medvetande är riktat mot denna variationsrymd och konstituerar en av eleverna potentiellt erfaren innebörd. Variationsteorin söker efter förklaringar i skillnader i att lära och beskriver nödvändiga förutsättningarna för lärandet. Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv så definieras lärandet som en förändring i uppfattning, erfarenhet och förståelse.

> From a variation theory perspective, the analysis of classroom learning offers information on whether, or not, the necessary conditions for learning something have been given. Central to this theory is the object of learning; that is, there is no learning without something being learned, so learning always has an object. To understand or experience something in a certain way, there must be certain necessary conditions present. Those aspects are more likely to be discerned if presented as a dimension of variation (Runesson 2005, s.).

Hur innehållet presenteras är betydelsefullt ur de lärandes synpunkt. Vi lär oss erfara världen genom att urskilja vissa aspekter av fenomenet mot bakgrund av erfaren variation (Holmqvist 2006, Runesson 1999 och Marton & Booth 2000, Marton & Tsui (2004). Generellt gäller dock att vad som varierar och vad som inte varierar, vad som nämns och vad som inte nämns, vad som varierar samtidigt och vad som följer efter varandra, är för elevernas lärande avgörande aspekter av undervisningen. (Carlgren & Marton 2007, s.157).

Det är variationsrymden i undervisningen som bestämmer den innebörd och mening som är möjlig för eleverna att erfara utifrån de aspekter som blir framlyfta/fokuserade och vilka som utgör dimensioner av variation eller inte variation. När några aspekter blir konstanta och andra varierar skapas ett utbud av dimensioner av variation som gör det möjligt för eleverna att erfara. För att varje elev ska ha förutsättningar att lära krävs variation, för i variationen kan varje elev ges större möjlighet att urskilja aspekter som leder till nytt lärande. Författarna benämner variationen med hjälp av fyra variationsmönster; kontrastering, generalisering, separering och fusion. Jag belyser dessa variationsmönster med hjälp av grundtankarna i planeringen av den gjorda learning studys studien:
Kontrast – X-termen är konstanta medan räknesätten däremellan varierar ; $x + x = 2x$ och är inte lika med $x \cdot x = x^2$. *Generalisering* – Instanser av begreppet varierar medan begreppet är konstant. Bokstäverna varierar och siffran och svaret är konstant $2x = 16$,$2a = 16$, $2v = 16$, $2D = 16$ och/eller $x^2 = 16$, $a^2 = 16$, $v^2 = 16$, $D^2 = 16$. Separation – Det som ska urskiljas separeras och varieras medan den andra aspekten förblir konstant. 2x är konstant i VL medan HL varierar $2x = 36$, $2x = 64$, $2x = 16$ och/eller VL varierar och HL är konstant $2x = 36$, $3x = 36$, $4x = 36$. Fusion – Flera kritiska aspekter som ska upplevas samtidigt och här är helheten konstant och x-talen varierar; $2x = 36$ parallellt med $x^2 = 36$ samt $3x = 36$ parallellt med $x^3 = 36$ och $4x = 36$ parallellt med $x^4 = 36$

Fokus i användandet av variationsteorin, är riktat mot den förmåga som lärarna vill att de lärande ska utveckla och huruvida lärarnas handlingar möjliggör det lärande ses utifrån om det var möjligt att åstadkomma, eller vad de faktiskt åstadkommer i undervisningen. Variation i lärande innebär att den lärande får förmågan att erfara någonting på ett annat sätt än tidigare, och som pedagoger kan vi frammana de aspekter av lärandes erfarande av ett fenomen genom just variationen (Runesson 080903; Holmqvist 2006). Det är inte säkert att lärarens intentioner, det som läraren tänkt sig att eleverna ska lära sig (det intentionella lärandeobjektet), överensstämmer med det lärande som verkligen möjliggörs i undervisningen, det som eleverna faktiskt erbjudits att lära (det iscensatta lärandeobjektet). Det som eleverna faktiskt har lärt sig (erfarna lärandeobjektet) kan inte ställas synonymt med att den enskilde eleven verkligen gjorde det bara för att något varit möjligt att lära. Variationsteorin kan kasta ljus över vad som är möjligt att lära i termer av vad som är möjligt att urskilja. Vidare kan det hjälpa till att identifiera de kritiska förhållandena i lärandemiljön (Runesson, 2005). Genom att erbjuda en variation av exempel och synsätt ökar man möjligheten för varje enskild individ att uppnå förståelse.

> When the teacher and the learners or the learners themselves interact about mathematical topic in the classroom for instance, a space of variation and invariance is opened. This space is a space of learning that enables the learners to notice or discern certain aspects, and as such it is a space with inherent constraints and possibilities. The space of variation, jointly constituted, is the enacted object of learning (ibid, s 85).

Variationsteorin har med människors erfarande att göra. Lärande bygger på människans grundläggande förståelse av ett fenomen, men där variationen har en avgörande betydelse för att förståelsen av ett fenomen skall förändras (Marton & Booth, 2000).
Variationsteorin är en allmän teori och säger inget om hur ett specifikt innehåll skall behandlas för att möjliggöra lärande. Däremot beskriver den vissa villkor för lärande och den kan ses som ett redskap som gör det möjligt att förstå varför samma sak kan förstås och uppfattas på olika sätt (Marton & Tsui, 2004; Runesson 1999). Det variationsteoretiska ramverket möjliggör en analys av det valda lärandeobjektet, dess behandling i klassrummet och det lärande som faktiskt möjliggörs i undervisningen, vilket skapar vidareutveckling av objektet. Lärandet beskrivs med begreppen; urskiljning, variation och samtidighet, och att göra lärandet möjligt är lärarens uppgift. Wernberg (2009) studerade lärandets objekt, det ämnesinnehåll som eleverna förväntades lära sig under en lektion och hur innehållet i lektionerna formades samt hur elevernas lärande förändrades under resans gång. Det lektionsinnehållet som lärarna använder i sin undervisning hävdar författaren har väldigt stor betydelse för elevers lärande. Resultatet av studien visar att de insikter eller förmågor som eleverna utvecklar om lärandeobjektet är beroende av de olika tillvägagångssätt som läraren presenterar för eleverna. Författaren anger att ett sätt att hantera målen i styrdokumenten är att arbeta med learning study och lärandeobjekt

Variationsteorin och learning study

Learning study utgår från ett valt lärandets objekt. Lärarna gör en kartläggning av elevernas förförståelse och kunskaper om lärandeobjektet i de olika klasserna, och utifrån ”upptäckta svårigheter” (kritiska aspekter), planeras innehållet i undervisningen. Lektionen videofilmas och efter genomförd undervisning så samtalar lärarlaget kring innehållet i den genomförda undervisningen utifrån videofilmen och observationen. Revidering av innehållet i undervisningen görs inför nästa lektion. I varje klass genomförs två lektioner, därefter gör eleverna ett eftertest (samma som förtestet) för att lärarna ska få syn på det erfarna lärandet samt utvärdera det erbjudna (iscensatta) lärandet. Därefter sker en utvärdering, analys och revidering av innehållet i undervisningen och lärarlaget startar med en ny klass som följer samma cykel.

Learning study har en koppling mellan en teoretisk grund, variationsteorin, och den praktiska verksamheten. Undervisningen utgår från en vetenskaplig teori där lärarlaget gemensamt planerar lektioner med utgångspunkt variationsteorin. Fokus i variationsteorin är att se vilka olika möjligheter som behöver synliggöras för eleverna, utifrån de svårigheter som kan finnas i att förstå ett lärandeobjekt (Holmqvist, 2006). Om vi som pedagoger är intresserade av de lärandes lärande måste vi uppmärksamma vad vi undervisar om och hur undervisningsinnehållet behandlas. Lärarnas undervisningshandlingar, vilket jag var inne på tidigare, har betydelse för elevernas lärande. Det som jag i min analys söker förståelse för är hur eleverna erfar lärande utifrån det erbjudna lärandet. Den LS studie som genomfördes sträckte sig över en termin och fokus var på en företeelse, lärandeobjektet och i detta fall att lösa ekvation.

Runesson (1999) hänvisar till Patrick (1998) som pekar på lärarnas skilda sätt att förstå och uppfatta ämnesinnehållet återspeglas i hur lärarna presenterar innehållet för eleverna. Elever som erbjuds att lära utifrån variationsteorin kommer därför att erbjudas att erfara undervisningsobjektet på olika sätt och objektets framställning ger olika möjligheter att lära. Learning study fokuserar främst på vad som skall läras, det valda lärande objektet och vilka förkunskaper eleverna har för att kunna möjliggöra lärande. Undervisningsinnehållet blir av central betydelse eftersom fokus ligger på vad eleven ska lära sig och hur denne ska lära sig det.

Nyckelbegrepp i Learning study

Innehållsorienterat innebär att identifiera elevens förståelse av något och karaktärisera deras förmågor. *Lärandeobjekt* är en förmåga eller ett förhållningssätt som eleverna ska lära sig. *Kritiska aspekter* är elevernas förkunskaper och vad de måste få syn på för att erfara lärande. *Urskiljning* innebär att kunna urskilja delar och helheter, aspekter och relationer för att erfara lärande. Vad som samtidigt blir urskiljt blir kritiskt för vilken innebörd det får för den lärande. *Simultanitet/samtidighet* innebär, att i ett fenomen/företeelse urskiljs aspekter samtidigt som det måste finnas fokalt i medvetandet. *Variation och invariant* är när ett fenomen/skeende varierar medan en annan aspekt förblir invariant (konstant) och den varierande aspekten urskiljs. Variationen är nödvändig för urskiljningen (Runesson 1999& 2005; Holmqvist 2006; Carlgren & Marton 2007).

LS blev en del av min studie genom att jag knöt an till elevernas förkunskaper, kritiska aspekter av lärandeobjektet och vad i det erbjudna lärandet som gör att elever erfar lärande, samt att jag använder mig av det variationsteoretiska perspektivet. Jag tar inte upp planeringen, det tänkta lärandet, som ligger till grund för planering och upplägg av lektionsinnehåll av det valda lärandeobjektet. Det går däremot aldrig att frångå att lektionerna tar sin utgångspunkt i elevernas förkunskaper och att vi lärare tillsammans har planerat lektionsinnehållet. Enligt min erfarenhet är det vanligast förekommande att läraren planerar och lägger upp sin undervisning ensam, inte som nu tillsammans med andra lärare. I den här studien intresserar jag mig för elevernas *förförståelse och kritiska aspekter* till *erbjudit lärande* till *ny kunskap* och tar hjälp av variationsteorin när jag beskriver det erbjudna och efarna lärandet. De tre steg jag använder mig av i elevernas lärandeprocess kan, uttryckt av Marton & Booth som hänvisar till tidigare studier, vara grundläggande dimensioner av lärandet "… erfarandet av lärandets förvärvande-fas kan brytas ner i ett erfarande av tre successiva steg … förståelse (1) - lärande - förståelse (2)." (s.70). Runesson (1999), Häggström (2008) och Wernberg (2009) har alla utgångspunkt learning study och variationsteorin. Runesson (1999) och Häggström (2008) studier intresserar sig för hur lärarna behandlar undervisningsinnehållet.

Runesson belyser hur undervisningsinnehållet kommuniceras med eleverna och Häggström gör en jämförelse i hur undervisningsinnehållet behandlas i Kina och Sverige och vad i det erbjudna lärandet som möjliggör lärandet för eleverna. Wernberg (2009) intresserar sig för hur lärandeobjektet ter sig både för lärare och elever och vad som kan bidra till nya kunskaper. Utifrån elevernas förstest gör Wernberg intervju för att få en ökad förståelse för hur elever löser uppgifterna. Även Oltenau (2007) har intresserat sig för framställningen av det matematiska innehållet i klassrummet och elevernas lärande utifrån det variationsteoretiska perspektivet. Min studie har likheter med ovanstående studie i att vad lektionen erbjuder eleverna ger möjligheter till visst lärande samt att variationsteorin är den teoretiska utgångspunkten. Det som gör den största skillnaden mellan min studie och ovanstående är att jag gör jag intervjuer i tre steg: efter förtest, efter den sista av två lektioner samt efter eftertest, vilket ingen av de nämnda studierna har gjort för att få en fördjupad förståelse för både svårigheter och lärande sett ur elevperspektiv.

Metod och genomförande

Min studie är två fallbeskrivningar av hur elever lär sig ekvationslösning. Jag försöker sätta mig in i dem undersöktes situation och se världen utifrån deras perspektiv i det att se vilka faktorer som påverkar lärandet av att lösa ekvation. En stor fördel med fallbeskrivningar är att den gör det möjligt för forskaren att koncentrera sig på en specifik företeelse och försöka få fram de faktorer som påverkar företeelsen i fråga. Fallstudier bedrivs empiriskt, praxisnära forskning, och rymmer därför möjligheter att på djupet studera en avgränsad aspekt under en begränsad tidsrymd. Bassey (1981), enligt Bell (2000) anger att fallstudier är…

> om fallstudier genomförs systematiskt och kritiskt, om de syftar till att förbättra utbildning och undervisning, om den utgör grund för jämförelser och om den vidgar gränserna för den existerande kunskapen genom att publiceras, kan man betrakta dem som en giltig form av pedagogisk forskning (s.17)

Praxisnära forskning har sin utgångspunkt i den kvalitativ metod som utgår från en verklighet och försöker tolka och förstå den. ”God forskning karaktäriseras av att metoden väljs så att den blir ett smidigt verktyg för att få kunskap om det problem man har valt” (Larsson, 1986, s.9).

Kvalitativ metod

Kvalitativ metod vilar på hermeneutisk grund och metoden innebär att göra ett försök i att överskrida subjekt-objekt förhållande och detta uppnår man som forskare genom att man försöker sätta sig in i den undersöktes situation och se världen utifrån hans eller hennes perspektiv. Bell (2000); Starrin (1994) uttrycker att forskaren är intresserad av att ta reda på hur människor upplever sin värld. Vi blir medvetna och tolkar kvalitéer utifrån det vi upplever. Kvalitet anger Starrin har med beskaffenheten att göra och att kvalitativa studier handlar om att undersöka hur ett fenomen är beskaffat. I mitt fall handlar det om att undersöka hur elever lär ett lärandeobjekt utifrån att lösa ekvationer. Lärandeobjektet har då varit fenomenet och beskaffenheten är elevers förkunskaper, det erbjudna lärandet och det erfarna lärandet utifrån tester, lektioner och intervjuer. Intervjuer har jag använt mig av för att få fram elevernas väg till lärande.

Begreppet praxisnära forskning enligt Carlgren (2005) ger i större utsträckning plats för mångvetenskaplig forskning med fokus på olika fenomen av betydelse för den pedagogiska yrkesverksamheten. Den praxisnära inkluderar inte bara fler forskningstraditioner utan begreppet ger också kopplingar till mänsklig reflekterad verksamhet. Praxisnära forskning handlar om det enkla och självklara som vi är verksamma inom, och om att förbättra praxis. Marton (2005) uttrycker att praxisnära forskning drivs av en strävan att förbättra praxis genom att se vad i vår arbetsvardag som kan förbättras och göra det möjligt att lära och till vår hjälp behöver vi en teori.

> Eftersom grundforskning är teoretisk och praxis är praktisk, behöver vi en teori och en praktik som förenas i detta exempel. Teorin är en teori om lärande och praktiken är skolans praktik. Eftersom skolans praktik sällan bygger på en teoretisk grund, måste vi ha ett särskilt arrangemang för att få ihop de två (ibid., s. 105).

Learning study i sig är en praxisnära forskningsmetod där lärarna som gör en Learning study har intresse av att utveckla sin praktik och förståelsen av den. Learning study är utgångspunkten till min studie och variationsteorin får en nyckelroll i resultatredovisningen. Variationsteorins centrala tanke, hävdar Marton (2005) är att vårt agerande i världen är en funktion av hur vi uppfattar världen. Teorin visar vad det är för slags saker som man bör vara uppmärksam på. ”Teorin kan följaktligen ge vägledning för vad man skall leta efter, däremot inte anvisning på vad man bör hitta” (ibid., s.121).

En vardaglig aktivitet skildras i min studie samtidigt som jag med hjälp av intervjuer och resultat från förtest och eftertest belyser de deltagandes perspektiv. Avsikten med studiens är att försöka förstå elevers uppfattade svårigheter av ett lärandeobjekt, se vilka möjligheter de gavs att lära (erbjudna lärandet) och hur eleven erfor ny kunskap (erfarna lärandet). För att nå större insikt i hur eleverna löser uppgifter och erfar ny kunskap försöker jag med hjälp av deras språkliga utsagor i samtalsintervjun förstå svårigheterna på förtestet och vad i undervisningen som kunde bidragit till nya kunskaper. Jag är delaktig i LS i form av upplägg, genomförande observationer och analys av lektionerna, som jag gör tillsammans med lärarna, samt vid intervjuerna och analys av videoupptagningarna tillsammans med eleverna. Intervjun efter lektionen genomförs med hjälp av en stimulated recall. Stimulated recall är en metod som med hjälp av ljudband- eller videoinspelat material dokumenterar en persons verksamhet och kort efter inspelningen får personen ta del av materialet. Det inspelade materialet ses och hörs av mig som undersökare och eleven som respondenten samtidigt, som ett led i att stimulera och påminna om respondenten om hur han/hon tänkte under den dokumenterade situationen. Undersökaren och den intervjuade har gemensamt möjlighet att stänga av videofilmen eller bandupptagningen för att kommentera det som händer (Haglund, 2003). Jag har försökt få fram och beskriva hur elever lär utifrån respondenternas utsagor och material som det framträder för mig. Mitt tillvägagångssätt är hämtat från variationsteorin - variationsmönster och från lektionerna under den gjorda learning studyn – och det tänkta lärande, erbjudna lärandet och det erfarna lärandet. Den kvalitativa forskningsintervjun med respondenterna ser jag som ett sätt att förstärka och förtydliga mina tolkningar av det erbjudna lärandet.

Genomförande

Min studie är en kvalitativ studie med utgångspunkt i ett variationsteoretiskt perspektiv. Grunden till studien utgår från en kurs ”Bättre lärande i matematik”, som jag gick tillsammans med två kollegor från skolan. Vi genomförde en learning study (kommer att förkortas LS) utifrån ett valt lärandeobjekt. I resultatdelen redovisas två analytiska fallbeskrivningar Bernt och Enar med utgångspunkt i lektioner och intervjuer.

Eleverna går på ett och samma program på en gymnasieskola i västra Sverige och de har deltagit på samma lektioner under LS. Jag fördjupar min studie genom att göra bandade intervjuer med eleverna efter både förtest och eftertest samt efter sista lektionen görs en s k stimulated recall intervjun. Stimulated recall innebär att jag och eleven tittar på genomförd lektion tillsammans och som tidigare nämnts får eleven möjlighet när han upplever lektionen igen, att delge mig vad och när hon lär. Stimulated recall möjliggör för mig att få följa elevernas tankar och lärande utifrån dem själv.

Förutom att resultatet som bygger på LS:s tester, mina bandupptagna intervjuer och LS:s två videoinspelade lektioner (L1 och L2), finns bandupptagningar från båda lektionerna gjorda under LS. Data gör det möjligt att följa elevernas lärandeprocess. Intervjuerna efter gjort förtest skedde samma dag. Intervjun som sker efter lektion L2 görs kommande dag och intervjun efter eftertestet sker för två dagar efter dem gjort det. Förtestet som var en del av learning study innehåller fem uppgifter (bil A). Mitt valda lärandeobjekt som jag undersöker handlar om att lösa ekvationer och uppgift ett på förtestet. Det är uppgift ett som jag kommer att redogör för och analysera i mitt resultat, eftersom det svarar mot mitt syfte i studien. Uppgift 1; Lös ekvationen så att du får reda på vad ”X” blir: $x^2 + (-3)^2 = 130$. Eleverna som deltar i studien anges med ett fiktivt namn och med han, och läraren med lärare och hon, samt citaten återges i skriftspråk. Övriga elever som nämns har även de fiktiva namn. Uppgifterna till förtest tillika eftertest, återges i bilaga A och uppgifterna till båda lektionerna finns i bil. B. Fokus för resultatredovisningen är resultat på förtestet och eftertest och att kunna följa elevernas lärandeprocess däremellan. Resultatet ska återge vad eleverna visade svårigheter med på förtestet och vad det är i det erbjudna lärandet som gör det möjligt att eleverna lär. Elevernas lärandeprocess redovisas och analyseras enskilt först, därefter ställs det samman till ett mer övergripande mönster för eleverna. Avslutningsvis sker en sammanfattande slutsats.

Lektionsinnehåll

Eleverna i min studie deltog i samma matematikundervisning, vilket gör att eleverna har tagit del av samma lektionsinnehåll. De två lektionerna och dess innehåll har jag försökt beskriva med hjälp av två figurer, 1 och 2. I analysen av respektive elevs lärandeprocess kommer jag att hänvisa till lektionsinnehållet med förkortning ex.L2:5, vilket är lektion 2 och fas 5. De analytiska redskapen som används för att beskriva undervisning och lärande är variationsteorins mönster; generalisering, kontrastering, separation och fusion, samt det tänkta, det erbjudna och det erfarna lärandet. Det går inte att bortse ifrån att ett lärande kan ske vid intervjun, I1, efter förtestet. När det gäller andra intervjutillfället I2, där en stimulated recall görs är även detta ett lärtillfälle. Jag kommer att använda mig av förkortningarna VL och HL för ekvationens två led, vänster led respektive höger led.

Följande lektionsinnehåll erbjöds eleverna:

Lektion 1

Lektionsinnehåll	*Arbetsgång*	*Hur?*
1. Gick igenom ord/begrepp; teckna- lösa ekvationer, HL och VL, symbol, pi, omkrets samt area.	Läraren skrev orden på tavlan. Eleverna var aktiva i att svara på ordens betydelse och anteckna.	**Helklass**
2. Finna den största respektive minsta arean.	Med hjälp av 1m snöre skulle olika geometriska figurer formas.	**Enskilt**
	Tillsammans kom de fram till vilken area som är störst respektive minst.	**Helklass**
3. Beräkna arean och beräkna sidan på en kvadrat. Två lika faktorer blir en positiv produkt.	Läraren utgick från 1m snöret och beräknade arean på kvadraten, angav att även två negativa faktorer blir 625. Eleverna använd räknare, tillsammans beräknade de sidan på en ny kvadrat.	**Helklass**
4.Uppgift 1 (bil.B) – teckna och lös en ekvation.	Eleverna läste uppgiften.	**Enskilt**
	Läraren ritade och samtalad kring uppgiften, tecknade och löste den.	**Helklass**
5. Uppgift 2 (bil.B) – rita en bild till ekvationen och lös ekvationen.	Eleverna fick rita en bild och lösa den.	**Enskilt**
	Tillsammans tecknade och löste de uppgiften.	**Helklass**
6. Uppgift 3 (bil.B) – teckna och lös ekvationen.	Eleverna skulle läsa och lösa uppgiften.	**Enskilt**
	En elev upptäckte ett fel, vilket korrigerades när läraren ritade och skrev på tavlan, samt att de löste den.	**Helklass**
7. Uppgift 4 (bil.B) – lös uppgift med hjälp av formelbladet.	Läraren läste uppgiften, betonade att de skulle använda formelbladet.	**Helklass**
	Lösa uppgiften, läraren gav hjälp vid behov.	**Enskilt/par**
	Läraren skrev och räknade ut kvadraten.	**Helklass**
	Eleverna beräknade cirkelns area.	**Enskilt/par**
	Läraren delgav diametern och radien, samt gjorde uträkning på tavlan.	**Helklass**

(fig.1)

Lektion 2

Lektionsinnehåll	*Arbetsgång*	*Hur?*
1.Reflektionblad över gårdagens lektion.	Vad lärde jag mig respektive inte lärde mig igår.	**Enskilt**
2. Gick igenom addition och och multiplikation av två respektive tre variabler.	Läraren skrev på tavlan, eleverna anteckna.	**Helklass**
3. Gick igenom multiplikation med två negativa och två positiva tal.	Läraren skrev på tavlan, eleverna antecknade, samt kontrollerade med räknaren.	**Helklass**
4.Uppgift 5 (bil.B) – lös uppgift, ta hjälp av formelbladet.	Eleverna skulle läsa och göra uppgift, läraren gav hjälp vid behov. Grupp/par skrev lösningar på tavlan.	**Par/Grupp**
	Läraren lyfte fram att det är bra att skriva enhet, ett "fel" lyftes- division istället för kvadratrot (2r likställdes med r^2), hur man avrundar, samt kontrollräkning - pi • $5{,}71^2$ • 5 = V.	**Helklass**
5. Uppgift 6 (bil.B) – lös uppgift, ta hjälp av berättelsen.	Läraren berättade en berättelse samtidigt som hon ritade upp en brunn med hundvalp i, skrev volymen och diametern.	**Helklass**
	Eleverna skulle lösa uppgiften, läraren gav hjälp när de behövde och skrev Sen sina lösningar på tavlan.	**Par/grupp**
6. Uppgift 7 (bil.B) – lös potensekvationer.	Läraren skrev fyra potensekvationer på tavlan.	**Helklass**
	Eleverna skulle lösa dem.	**Enskilt**
	Läraren gick igenom lösningarna.	**Helklass**

(fig.2)

Urval

De elever som var aktuella för studien var elever ur en och samma klass som följer samma undervisning vilket gav möjlighet att kunna följa det erfarna lärandet i. Marton & Booth (2000) förklarar hur omvärlden erfars på olika sätt fast människor befinner sig i samma situation. Lärandet blir individuellt eftersom lektionen upplevs och erfars på olika sätt. Individernas fokusering på samma sak kan skilja sig beroende på att de har olika erfarenheter. Innan LS gick det ut en förfrågan till alla elever och deras föräldrar om tillåtelse att filma, samtidigt som de fick en förfrågan om de kunde tänka sig att delta i de bandade intervjuerna (bil.C) Det var fem elever som kunde tänka sig att bli intervjuade och alla fem gick i samma klass och därav urvalet av klass. Tilläggas ska göra att den klass där vi gjorde vår första LS valdes medvetet bort i att delta i intervjuerna, eftersom det var vår första "övning" i att göra en learnings study studie och för att eleverna i den klassen hade ett annat behov i att delta på sina ordinarie lektioner under den perioden vi genomförde LS. Vidare så anpassades intervjutillfällena till att vara inom ramen för LS-studien och på deras ordinarie skoldag/lektioner och därav hade jag ingen möjlighet att inte "plocka ut" dem för intervjuer. Jag gjorde intervjuer med alla fem deltagarna som ville vara med efter förtestet. Vid första lektionstillfälle var en av dessa elever sjuk, vilket gjorde att han föll ifrån. Jag gjorde sedan en stimulated recall efter L2 med de kvarvarande fyra, liksom intervjuer efter gjorda eftertest. All data på banden finns nedtecknade och intervjuer är ordagrant återgivna. Videofilmerna är nedskrivna utifrån klockslag och innehåll, samt med egen reflektion. Mängden av insamlad data kom att bli en alltför stor uppgift att analysera inför en D-uppsats. Här gjordes ett nytt urval grundat på att välja ut två elever, där båda uppvisade svårigheter med att lösa uppgiften på förtestet och där sedan en av dem klarade att lösa uppgiften och en som visade forstsatta svårigheter på eftertestet. Det var endast en av de fyra eleverna som klarade att lösa uppgiften på eftertestet under testtillfället och en elev vars svårigheter kvarstod även efter intervjun efter eftertestet. De två andra eleverna klarade uppgiften när de vid intervjun återgav hur de löst uppgiften, de så att säga uppmärksammade "fel" de gjort.

Datainsamling

Datainsamlingen grundar sig på en uppgift, uppgift 1, från LS test, mina bandupptagna intervjuer och LS två videoinspelade lektioner (L1 och L2), samt två bandupptagningar (diktafoner) från båda lektionerna gjorda under LS. De bandade upptagningarna gjordes som en backup för ljudet till videoupptagningen. Dessa bandupptagningar återger alltför liten "hörförståelse" för respondenterna eftersom de under LS studien inte medvetet placerades intill dem. Vid något enstaka tillfälle kan de ha hörts på banden men då återges det i resultatet. Förtestet och tillhörande intervju bildar underlag för analysen av de svårigheter eleverna visade på uppgiften. De både lektionstillfällena filmades, bandades och observerades, men det är den sista av dessa lektionstillfällen som jag gjorde en intervju med eleverna kring. Intervjun var en stimulated recall.

Lektionerna (videon) och gjorda intervjuer bildar underlag för det framställda lärandet. Observationer som fördes, överensstämde med det som synliggjordes på filmen och därav kommer de inte att nämnas. Eftertestet tillika intervjun efter lektionerna svarar sedan mot det erfarna lärandet.

Intervju

I kvalitativa studier är intervjuer den vanligaste metoden att samla in data. Intervjuerna kan variera från att vara helt strukturerade till att vara öppna och semistrukturerade. De öppna och semistrukturerade intervjuerna är de vanligaste inom kvalitativ metod (Kvale 1997 & Alexandersson 1994). Samtal mellan forskare och respondenten gör att forskaren kommer nära den pedagogiska vardagen. Tonvikten i samtalet ligger på respondentens upplevelse av händelsen. (Kvale, 1997 & Uljens, 1989). Min undersökning är kvalitativ och en av metoderna för att samla in data blev därför intervjuer med eleverna. I intervjuerna sökte jag förståelse ur de intervjuades perspektiv och i den kvalitativa forskningen liksom i det jag undersökte försökte jag gå mer öppet in i datainsamlingen med ett mindre strukturerat datainsamlingsförfarande för att på detta sätt bättre kunna bearbeta okända faktorer. Analys går ut på att söka förståelse av ett fenomen som varit oklart (ibid.). Förtestet med intervju visade den förförståelse respondenterna hade för uppgiften vilket skapade förståelse för vad i lärandeobjektet som kunde ha gjort att de fick svårigheter, de s k kritiska aspekterna. Uifrån de kritiska aspekterna (elevernas svårigheter) planerades lektionernas innehåll av det tänkta lärandet i vår LS. Lektionersinnehållet speglade sedan det eleverna hade erbjudits att lära, det sk erbjudna lärandet. Lektionsinnehållen tillsammans med intervjuerna gav mig som undersökare möjligheter att tolka och försöka förstå var på resan väg eleverna kunde ha getts möjligheter att utveckla sitt lärande. Intervjuerna (som ibland blev vägledande samtal) kunde också ge möjligheter till lärande. Stimulated recall bidrog till att klargöra lektionsinnehållet på nytt både för mig som undersökare men också för respondenten. Eftertestet och intervjun efteråt gav mig underlag för vad de utvecklat.

Metoddiskussion

Urvalet

En praxisnära forskning handlar om att tolka individernas perspektiv och att beskriva de uppfattningar som de har. I min studie är urvalet begränsat till två elever vilket inte kan sägas representerar massan av populationen för lärande i åk1 på alla gymnasier, men kan ge en fingervisning om var i svårigheter kan ligga i att lösa ekvationer, samt hur man kan möjliggöra lärandet för fler elever.

Datamaterialet och metod

Anledningen till att det blev endast en intervju (stimulated recall) till båda lektionstillfällena, var delvis orsakad av tidsbrist men också av att eleverna ”missade” sina ordinarie lektioner vid intervjutillfällena. Vidare kunde det bli allt för krävande för eleverna att delta. Intervjuer tar tid och mer tid skulle gå åt till en stimulated recall. Att valet föll på den sista lektionen var för att eleverna hann erbjudas två lärtillfällen och jag hade på det sättet mer eller mindre möjlighet att analysera två lektioner istället för en. Vidare gjordes eftertestet först efter att båda lektionerna var genomförda. De båda lektionstillfällena och intervjuer gör det möjligt att förstå och lära mer av vad som kan möjliggöra lärandet. Videosekvenserna följer inte specifikt respondenterna eftersom filmfokuset ligger främst på lärarens aktivitet under lektionerna, vilket gör att jag inte alltid kan följa de medverkandes delaktighet under lektionerna. Eventuella diskussioner på bandupptagningarna går bara till en liten del att följa eftersom diaktafonerna inte placerades specifikt vid respondenterna och att ljudnivån i klassrummet påverkade. Bandupptagningarna var i vår LS i första hand tänkta som ett komplement i fall ljudet till videokamran skulle sluta fungera.

Styrkan i intervjuformen är att den ger tillgång till forskaren och intervjupersonernas sätt att förstå sin vardag, det här fallet det tänkta lärandeobjektet, som ligger till grund för individens omvärldsuppfattning och handlande. Samtidigt kan forskningsområdet begränsas av undersökarens frågor, men inte innebörden av själva fenomenet som det uppfattas av respondenten (Kvale, 1997). Mitt mål är att försöka klargöra respondenternas utsagor, som jag tolkat dem och bana väg mot nya perspektiv. Författaren menar att intervjun aldrig kan återges exakt, eftersom det inte går att överföra hela den gemensamma skapade intervjusituationen. Intervjun kan beskrivas som att den sluter sig och löses upp i sönderstyckade citat. Tolkning är något som pågår ständigt och vi kan inte välja bort att inte tolka något (Larsson, 1986; Ödman 2007). Min undersökning blir en tolkning i och av det erbjudna lärandet och intervjutillfällena samt en tolkning av respondenternas tolkning av vårt samtal och frågor under intervjun. Uljens (1989) menar att min tolkning av verkligheten inte går att i efterhand jämföras med någon slags ”sann verklighet”. Kvalitativ forskning är inriktad på att uppnå ny förståelse av ett forskningsobjekt och analysen innebär att kunna beskriva hur människor uppfattar omvärlden. Jag beskriver som jag uppfattar hur lärandeobjektet framträder för eleverna vid ett visst tillfälle, inte hur något egentligen är. Datamaterial som används motsvarar den verklighet man tror att den gör (Larsson, 1986). Den grundläggande idén med stimulated recall är enligt Haglund (2003), som hänvisar till Bloom, en möjlighet att understödja en ursprunglig situation på ett levande och exakt sätt som påminner och skapar stimulans hos intervjupersonen i just den situationen. Intervjuer med stimulated recall är värdefulla källor av information i på vilket sätt lärare kan förklara och rättfärdiga sitt arbete och i mitt fall rättfärdiga, förklara och förstå elevernas lärande.

Validitet och reabilitet

När undersökningsresultatens trovärdighet, noggrannhet och giltighet granskas är det forskarens beskrivningar som är centrala. En sanning är relativ och det gömmer sig ett perspektiv bakom varje beskrivning av verkligheten.
I min studie är det min upplevda sanning av lärandeprocessen. Det är viktigt att vara medveten om den egna förförståelsen och genom att explicitgöra förförståelsen gör man utgångspunkten för tolkningen tydlig (Starrin & Svensson, 1994). Ödman (2007) och Uljens (1989) menar att en valid tolkning är en tolkning vars innebörd är giltig för den företeelse som studeras eller ger mening åt företeelsen. I validering ingår några nyckelpunkter som identifiera, beskriva och få omvärlden att acceptera det. Validiteten är synonymt med pålitligheten och hur vi förmedlar det vi har kommit fram till. Jag har försökt förmedla mina tolkningar genom att förtydliga med vad jag utgår ifrån och med citat. Det vi förmedlar ska ge läsaren förståelse för det vi undersöker, samt att validiteten i beskrivningskategorierna speglar noggrannheten och tillfredsställelsen av de uppfattningar som uttrycks i respondenternas utsagor. Det går alltid att argumentera för eller emot en tolkning genom att kritiskt bedöma och jämföra relativ rimlighet. Giltigheten har med hur väl det vi undersöker visar sig och hur väl man kan undvika felkällor. Att känna till de vanligaste felkällorna är ett bra utgångsläge som omgivande faktorer, den mänskliga naturen begränsningar och hur förväntningar är på det som visar sig (Hartman, 2004). I den mänskliga naturen är det svårare att förhålla sig objektiv än subjektiv, men genom att vara medveten om det i sitt skrivande så ha jag försökt så långt det är möjligt att förhålla mig objektiv. Hartman tar även upp att kravet på pålitligheten har att göra med att man ska kunna göra samma observationer igen samt att andra ska kunna göra samma observationer. Reliabilitetsmåttet utgörs av det faktum att någon annan person förstår det som finns i det empiriska materialet t(ibid.) Studien är möjlig att genomföra igen av både mig och andra, samt att med hjälp av utsagor och lektionsinnehåll så ha jag försökt skapa förståelse för mitt empiriska material.

Etik

Den grundläggande idén med etik är enligt Bigsten & Orlenius (2006) det personliga ansvarstagandet och att utifrån det handla ansvarigt på medvetna grunder. Det är jag som undersökare som ska vara insatt i de regler som gäller för undersökningar som innefattar människor. I det att jag bedriver en undersökning i verksamheten innefattande människor har jag att ta hänsyn till att deltagarna godkänner sin medverkan och att avidentifiering sker av respekt för individens person och integritet. Vidare är det viktigt att jag är saklig och rättvis i det jag tolkar och beskriver i min framställning i studien, vilket jag har försökt vara.

Vetenskapsrådet (2002) hänvisar till fyra forskningsetiska principer som jag som undersökare har att ta hänsyn för deltagarnas självklara individskydd. Den första principen är informationskravet som uppfylldes i och med att både deltagare och föräldrar informerades om pågående studie och vad som gällde (bil.C).

Nästa princip är samtyckesprincipen och studien bygger både på lärare och elevernas deltagande och därför är båda tillfrågade om sin medverkan. Läraren tillfrågades muntligt och eleverna respektive föräldrarna har fått ett skriftligt dokument som beskriver syftet med LS och vad deras medverkan innebär och om de vill delta. Dokumentet undertecknas av både eleven själv också deras föräldrar eftersom de är omyndiga. Om de valt att delta, har de ändå under videoinspelningen haft möjlighet att sätta sig så under lektionerna att det minimerade risken för att synas på filmen om de önskade det. När det gällde mina respondenter har de inför intervjutillfällena fått frågan om fortsatt delaktighet, samt även fått information att de hade möjlighet att avbryta intervjuerna. Hela tiden låg det i mitt intresse, samt hos lärarna under LS-studien, att eleverna skulle delta på sina villkor. Det är viktigt för undersökaren att eftersträva konfidentialitet och att det kan efterlevas genom att låta respondenterna ge sitt samtycke under studien. Alla eleverna som medverkar eller omnämns har också fått fingerade namn i de beskrivna händelserna och löfte om att endast vi i LS-studien skulle titta på filmerna och att endast jag har haft tillgång till intervjuerna. Det insamlade materialet används enbart för mig och min studie, vilket innefattar den fjärde principen – att det endast får användas för forskningsändamål. Eleverna har också erbjudits att ta del av det jag skriver under resans gång, men avböjt. Jag har även fått tillåtelse att dela med mig av det färdigställda materialet utan att de har läst det, men de ville gärna ha en kopia när materialet var klart. Tilläggas ska att elevernas och lärarnas medverkan i LS med upplägg av lektioner, genomförande och resultat skulle komma att användas i utbildningssyfte för oss lärare. Detta var elever och föräldrar införstådda med (bil.C).

Resultatredovisning

I resultatdelen återges först en kort beskrivning av respondenternas, Bernts och Enars, inställning till ämnet matematik. Därefter med utgångspunkt i förtest och intervjun efteråt, redogörs för de svårigheter (kritiska aspekter) som de framträdde för mig i att lösa uppgift 1 på förtestet. Svårigheterna beskrivs och analyserar var och en för sig innan det följs upp av resultat från eftertestet. Resultatet från eftertestet visar det lärande som eleverna utvecklat. De uppvisade svårigheterna kopplas sedan samman med det lärande som visade sig på eftertestet och i intervjuer. Lärandet beskrivs och analyseras utifrån vad i det framställda lärandet som kunde ha möjliggjort att de utvecklade kunskap av i lärandeobjektet. Mitt resultat bygger på det erbjudna och erfarna lärandet av en uppgift, uppgift 1, från förtestet utifrån learning study studien. Resultatredovisningen skildrar elevernas resa från deras förförståelse till utvecklande av ny kunskap och vad som kunde skapat förutsättningar under lektionerna att lära. Efter att jag redogjort för var och en av eleverna, Bernt och Enar, görs en sammanställning av deras likheter och skillnader av svårigheter samt deras utvecklande av kunskap sett till vad de erbjöds att lära. Under lektionerna kunde också både Bernts och Enars lärande, ha möjliggjort av andra elever, eftersom de arbetade i grupp/par. Bernt arbetade med Maja och Sara och Enar med Albin. I resultatredovisningen återknyter jag till lektionsinnehållet, se s.19-20 och variationsmönstren, se s. 12.

BERNT

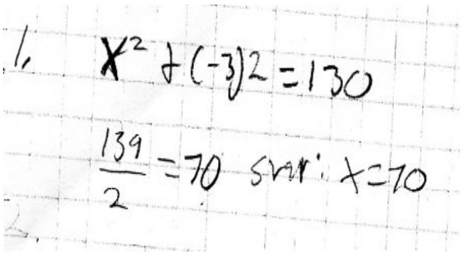
Bernt och matematiken

Matematiken är ett ämne som Bernt har upplevt varit svårt och svårigheterna och som han själv sa så började svårigheterna på högstadiet. I nästa mening uttryckte han att matematiken är väl egentligen inte svår, bara man intresserar sig för den. Bernt menade, att han själv inte hade varit speciellt intresserad av matematiken, och det hade gjort att det hade gått mindre bra. Det hade varit i årskurs åtta som svårigheterna började. Han kunde inte delge mig vad det var som gjorde att det blev svårt, utan angav att det mer berodde på att det inte fanns något intresse för matematiken under de här åren. Bernt berättade att han hade fått stöd i matematiken på högstadiet för att ha större möjlighet att lyckas med att nå ett G i ämnet och för att därigenom kunna bli behörig till att söka sig till ett nationellt program på gymnasiet. Bernt går under min studie första året på ett yrkesförberedande program på ett nationellt program. När han började på gymnasiet erbjöds han stöd redan i början av sina studier, eftersom han själv hade bett om det och delgett matematikläraren att matemtiken hade varit ett ämne som han hade lyckats mindre bra i. Läraren uppfattade ganska snart att Bernt saknade vissa grundläggande färdigheter, vilka hon tyckte han behövde utveckla för att ha större förstusättningar att klara matematiken. Bernt återkom ett par gånger till att det var hans ointresse som gjort att det hade gått mindre bra i matematiken. Under I2 nämnde också Bernt att han kunde lösa ekvationer på sin tidigare skola, men att han hade glömt det nu.

B: då arbetade jag med det hela tiden och så gjorde jag provet, man höll ju på
I: ja
B: ett kapitel i taget
I: ja
B: och då kunde jag det, sen har jag glömt av det igen

Bernts lösning på förtestet

Bernts lösningen på uppgift ett på förtestet (bil.A):



Under intervjun så delgav Bernt mig att lösa ekvationer handlar om att få fram svaret samtidigt som han pekar på x.

I: vad innebär det att lösa en ekvation
B: få fram svaret

Bernt förförståelse i att lösa denna typ av ekvationer tolkat utifrån hans egna utsagor under intervjun, samt analys av gjort förstest var att han förstod att ekvationslösning handlar om att hitta variabelns värde och att han visste att ett tal i kvadrat ska mutlipliceras med sig självt. Sammanställningen av de svårigheter som framkommer i hans lösning av ekvationen var:

1. *aritmetiken/beräkning*
2. *tal och vairabler med exponent*
3. *negativa tal*
4. *flerstegslösning i ekvationsberäkning*

Utifrån de angivna svårigheterna beskriver jag, som följer, vad jag grundar dessa uppfattade svårigheter på.

1. Bernts svårigheter i aritmetiken/beräkning

I sin redogörelse för hur han löste uppgiften började han med att skriva av uppgiften, $x^2 + (-3)^2 = 130$, och i nästa steg skrev han 139/2 = 70 och under det skrev han att svaret är x = 70. Bernt använde sig inte av miniräknaren till uppgiften och när han fick hundratrettionnio dividerat med två att bli sjuttio, tolkade jag det som att han hade avrundat och därmed fått det till sjuttio.

När han angav att 139/2 = 70 använde han likhetstecken och inte ”*ungefär-lika-med-tecken”*, vilket kunde tyda på att Bernt inte hade klart för sig likhetstecknets betydelse. När jag inledde intervjun efter gjorda förtest frågade jag Bernt hur han tänkte kring uppgiften och då framkom att

> … jag tänkte, ja x lika med sjuttio, sjuttio gånger två blir hundra-
> femtio, nä hundrafyrtio menar jag, hundrafyrtio …

Här uppfattade jag en viss osäkerhet hos Bernt i beräkningen av 70 · 2, eftersom han först sa hundrafemtio och därefter hundrafyrtio. I lösningen stod det heller inte hundrafyrtio uttryckt, utan hundratrettionio, och trots att han såg uppgiften och delgav mig sina tankar kring lösningen tog han inte upp hur han hade fått hundratrettionio att bli hundrafyrtio. Tilläggas ska göras att jag inte frågade honom om det heller.

2. Bernts svårigheter i tal och variablar med exponent

På förtestet kunde jag se att han dividerade med två när variabeln exponent var två, 139/2 = 70, vilket jag tolkade som att han såg x i kvadrat som två multiplicerat med och därför dividerar. Under intervjun berättade han följande:

> B: jag tänkte att, ja, att x upphöjt till två är gånger två, men jag (blir tyst)
> I: x gånger två, är det det du säger
> B: ja, x gånger två …

Det som han i ovanstående citat uttryckte bekräftar den analysen jag gjorde av att han såg x^2 som $2 \cdot x$. När jag fortsatte att samtala med honom, blev det återigen klart för mig att han såg variabel, liksom tal med exponent som tal/variabel med koefficient.

> B: men tvåan, vet inte hur jag tänkte då, hur tänkte jag där (pratar högt för sig själv)
> vet inte hur jag tänkte där
> I: vet du vad det innebär det här, ta det talet och parentes som står där minus tre inuti,
> vad betyder den tvåan
> B: ja
> I: ja, hur säger man det
> B: just det, upphöjt till två
> I: upphöjt till två
> B: ja, och så tänkte jag, det är väl sex eller någonting tänkte jag

Han multiplicerade tre med två för att få produkten till sex, vilket är att se minus tre i kvadrat som tre multiplicerat med två. Här var tal i kvadrat samma för honom som multiplicerat med två. Trots att han kunde uttrycka att det stod upphöjt till två så tolkade jag att han inte hade klart för sig innebörden av det. Dessutom bortsåg han från att trean är ett negativt tal vilket jag återkommer till. På frågan om han tycker att x upphöjt till två, liksom tal upphöjt till två är svårt, sa han ja. Efter en stunds resonemang sa han:

> B: jag tror det är typ delat på tre, x upphöjt till två
> I: vad har du fått här då

B: x gånger x eller är det x gånger x, eller x gånger x gånger x, x gånger x gånger x, eller x gånger x, för där står ju inte x upphöjt till tre, och du säger ju, och där står ju x upphöjt till två
I: ja det gör det
B: ja
I: ja, du börjar fundera mer och mer nu
B: ja och den där, blir ju liksom tre gånger tre, både tre, ja just det man har ju bassiffran
I: mmm
B: och sen har man två till
I: okey
B: ja och då blir det alltså hundrafemtisju delat på tre

Bernt visade via citatet att han hade svårigheter med variabel och tal med exponent. Han visste att det hade med multiplikation att göra, men särskiljde inte $x \cdot x$ från $2 \cdot x$ och $x \cdot x \cdot x$ från $3 \cdot x$. Han hade svårt med tal i kvadrat och såg talet $(-3)^2$ genom att se trean som bassiffra och sedan multiplicera den med sig själv tre gånger och får fram att det blir tjugosju. Tjugosju adderade han till de hundratrettio han hade på HL och sedan dividerade han med tre. Detsamma gav han uttryck för när han tog x gånger x gånger x och sedan uttryckte att man ska dividera med tre. Han såg antalet gånger som han multiplicerar variabeln med sig själv, som att han skulle dividera med det antalet för att få fram siffervärdet på variabel. Bernt hade svårigheter med variabel och tal med exponent.

3. Bernts svårigheter i beräkningar med negativa tal

I: vet du vad det innebär det här, ta det talet och parentes som står där minus tre inuti, vad betyder den tvåan
B: ja
I: ja, hur säger man det
B: just det, upphöjt till två
I: upphöjt till två
B: ja, och så tänkte jag, det är väl sex eller någonting tänkte jag

Bernt visade som framgår av citatet att negativa tal i kvadrat vållade honom svårigheter. Han kunde ha sett exponenten som två och multiplicerar den med en positiv trea trots att trean inom parentesen är negativ, $(-3)^2$, eller så såg han det som minus tre gånger två och får det till sex. I intervjun lyfte jag fram att trean inom parentesen är negativ, genom att säga minus tre inom parentes men trots det gjorde han ingen förändring i sitt sätt att tänka. Ett tänkbart alternativ, som jag uppfattade, till att Bernt fick det till sex, är att han visste att två negativa faktorer blir en positiv produkt. Det andra alternativet, som jag kunde tolka in var att han inte visste att en negativ faktor gånger en positiv faktor blir en negativ produkt. För att få $(-3)^2$ att bli sex så kunde han ha tänkt antingen minus tre multiplicerat med minus två eller minus tre multiplicerat med två eller tre multiplicerat med två för att få fram svaret sex. I sin lösning av $x^2 + (-3)^2 = 130$ uppfattade jag två sätt att tolka in hur han fick minus tre i kvadrat att bli minus nio. Det första var att han fick två negativa faktorer att bli en negativ produkt, vilket gjorde att han kunde ha adderat nio till hundratrettio när han växlade led, $(-3)^2 = -9$ i VL och när han växlade över till HL fick han $130 + 9 = 139$.

Den andra tolkning var att han fick minus tre multiplicerat med minus tre att bli en positiv produkt, men visste inte att plus nio i VL blir minus nio när han växlade över till HL. Det gör att det fortfarande blir 130 + 9 = 139. Under intervjun ovan pratade han om att produkten blir sex vilket gör att den sistnämnda tolkningen av att produkten blir nio, bättre kan överensstämma med att produkten bli positiv och att hans svårigheter ligger i växlingen av led, alltså i ekvationslösningen.

4. Bernts svårigheter i flerstegslösning i ekvationsberäkning

Det framkom i lösningen han gör av ekvationen, $x^2 + (-3)^2 = 130$, att han inte använde ekvationslösning utan numerisk räkning. I nästa steg skrev han hundratrettionio dividerat med två lika med sjuttio och fortsätter att skriva på raden under att x är lika med sjuttio. Bernt berättade under intervjun hur han hade tänkte när han löste ekvationen och jag förstod att han hade svårt att följa sin egen tankegång i hur han hade löste

> E: men jag fattar inte det, jag tänkte, ja x lika med sjuttio, sjuttio, två blir hundrafemtio, nä hundrafyrtio menar jag, hundrafyrtio blir det, plus minus tre det är ju hundratrettiosju, hur () tänkte jag

Vad jag kunde förstå av hans resonemang så visste han att ekvationslösning handlar om att få fram ett siffervärd på variabeln, men inte hur man kommer fram till svaret.
Uppgiften var att lösa ekvationen och det framkom att Bernt hade svårigheter i att lösa den. Bernt gjorde en numerisk räkning av ekvationen. Han använde sig inte av ekvationslösning och det kanske var ett nytt moment för honom. Likhetstecknets betydelse och VL och HL, samt ”vad-det-är-som-gör-att-det-är” teckenbyte när ett tal byter led, uppfattade jag också är moment som kunde göra att Bernt fick svårigheter med att lösa ekvationer.

Bernts lösning på eftertest

Redogörelsen för Bernts uppfattade svårigheter följs av eftertestet och vad i det erbjudna lärandet som kunde ha möjligjort hans lärande av de fyra kritiska aspekterna.

Följande lösning gjorde Bernt av samma uppgift på eftertestet (bil.A):

$$x^2 + (-3)^2 = 130$$
$$x^2 + 9 = 130$$
$$x^2 + 9 - 9 = 130 - 9$$
$$x^2 = 121$$
$$x = \pm 11$$

På eftertestet kvarstod inga av de svårigheter som jag hade analyserat på förtestet. Det enda som inte framgår av Bernts lösning är hur han fick fram svaret plus minus elva, men svaret är korrekt. Bernt gjorde en flerstegsklösning av ekvationen där beräkningarna var korrekt. Han hade förstått skillnaden mellan tals och variabels exponent och koefficient samt att två negativa faktorer ger en positiv produkt. När vi träffas efter eftertestet är ha strålande glad över sina nyvunna kunskaper.

> B: ja jag är faktiskt lite stolt över mig själv att jag klarade det

1. Vad möjliggjorde att Bernt klarade aritmetiken/beräkningen?

Under L1, L2 och intervjuerna använde han miniräknaren, vilket gjorde att han hade förutsättningar att kontrollera sina beräkningarna.
Han visste hur han skulle använda miniräknaren och på så sätt kunde han komma fram till rätt svar. I I1 fick Bernt berätta hur han tänkte när han löste uppgifterna, vilket kunde bidra till reflektion och att uppgifterna kunde komma i nytt ljus. Han kunde få syn på sina egna eventuella brister i beräkningarna vilket gav möjligheter för alternativa och hållbara beräkningar. Detta gällde även för I2 där han delgav mig hur han/de gjorde lösningarna och fick de svar de fick på respektive uppgift.

Vid genomgången i L1:3 så visade läraren hur man slog kvadratroten på ett tal med hjälp av miniräknaren, för att få fram vad sidan är på kvadraten när arean är given. Jag såg på videoinspelningen från den lektionen att Bernt slog, och sa högt vad han fick fram. I arbetet med Maja och Sara, när de skulle lösa uppgifterna använde de miniräknaren i gruppen och jag såg att de pratade med honom samtidigt som de slog på miniräknaren och höll upp den för honom. Här tolkade jag det som att han under lektionerna och i grupparbetet fick möjlighet att förstå att miniräknaren är ett användbart verktyg vid uträkningar. Bernt berättade under I2 att han ibland hade svårt att hänga med och förstå resonemanget i hur Maja och Sara löste uppgifterna som de (de han arbetar tillsammans med) gjorde och det blev att han bara skrev av det de skrev.

> B: ja, men de driver iväg, så det känns som (tyst)
> I: känns det som du skriver av dem, mycket?
> B: ja

Det Bernt kan ha haft behov av var att få hjälp med användningen av vissa funktioner på räknaren och den hjälpen bidrog läraren, klasskamraterna och jag med under både lektioner och intervjuer. Han frågade mig dels vad det är för skillnad på de båda minustecknen, – och (-), och dels hur man slog roten ur, vilket jag också visade honom. Bernt fick möjlighet att lära sig funktionerna på miniräknaren, vilket kunde ha bidragit till att han klarade av att lösa ekvationen.

2. Vad möjliggjorde att Bernt klarade tal och variabler med exponent?

I resonemanget med eleverna under L1:4 när läraren skrev b+b+48=b+b+b+b+b+b och att b+b+b+b+b+b kunde skrivas på ett annat sätt, så sa en elev sex b och en annan b upphöjt till sex. Detta möjliggjorde en kontrastering för läraren som skrev 6b=b+b+b+b+b+b och $b^6=b\cdot\ b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$ för att uppmärksamma eleverna på skillnad när man använder addition eller multiplikation mellan varablerna och att det antingen är en koefficient eller exponent beroende av räknesätt.

Under L2:2 påminde läraren eleverna om att x upphöjt till två skrivs $x\cdot x = x^2$ och visade på skillnaden genom att göra en kontrastering, x+x=2x, för att visa på skillnaden. Detta kunde ha skapat lärande när x-termerna är konstanta men räknesättet variera. För att tydliggöra än mer för eleverna fortsatte läraren att visa skillnaden genom ytterligare en kontrastering $a\cdot a\cdot a=a^3$ och a+a+a=3a. Läraren skapade ytterligare möjlighet att urskilja likheter och olikheter genom skapandet av variation i en fusion genom att visa de båda kontrasteringarna samtidigt, räknesätten är konstanta men variablerna och antalet variabler varierar. Dessa variationer kunde ha tydliggjort vad skillnaden är mellan en variabels exponent och en variabels koefficient. Bernt berättade under I2 om hur de löste uppgiften L2:2, men han blev lite tveksam när jag frågade honom om hur de diskuterat sig fram till lösningen av siffervärdet på radien. Han sa att det var någonting med roten ur. Jag undrade om han mindes vad x upphöjt till två innebar och han svarade x gånger x och sedan skrev jag x i kvadrat är lika med hundratjugoett och han fick visa hur han skulle ha löst.

> I: och då vet du att ett tal gånger sig självt ska bli hundratjugoett
> B: ja, då får jag ta roten ur hundratjugoett

Vi återgick till hur de löst uppgiften och Bernt kommer fram till att det i VL blev trettiotvå komma sex och i HL r^2 och då sa han att man ska ta roten ur för att få reda på vad ett r är.

> I: i båda leden och vad har du kvar då
> B: trettiotvå komma sex och det är r upphöjt till två
> I: mmm, r upphöjt till två och vad gör du nu
> B: tar roten ur trettiotvå komma sex
> I: mmm, och vad får du svar på då
> B: vad ett r är

Bernt hade förstått att man tar kvadratroten ur för att finna siffervärdet på variabel i kvadrat.

3. Vad möjliggjorde att Bernt klarade de negativa tal?

Bernt fick veta att två negativa tal blir en positiv produkt när läraren vid genomgången under L1:3 delgav eleverna det, samtidigt som hon skrev $25\cdot 25 = 625$ och $-25\cdot -25 = 625$. Hur man tar roten ur på ett tal visade läraren med hjälp av miniräknaren.

Jag såg på videoinspelningen att Bernt slog på miniräknaren och sa högt vad han fått fram. I båda dessa fall är det svårt att veta om det är något han tekniskt lärt/lärde sig eller om han förstod varför det i båda fall blev en positiv produkt. När läraren sedan under L2:3 skrev $-3 \cdot -3 = (-3)^2 = 9$, så frågade Bernt varför två negativa faktorer blir en positiv produkt. Läraren svarade Bernt med att säga att två positiva faktorer blir en positiv produkt och två negativa faktorer blir också en positiv produkt och gav ytterligare ett exempel. Hon skrev $-2 \cdot -2$ och bad dem slå det på räknaren för att se att produkten blir positiv och sedan kontrasterade hon och skrev $-2 \cdot 2$ och bad dem även slå det, för att se skillnaden. Jag frågade honom under I2 om han förstod utifrån det svaret han fick.

I: ja det hör ju jag att du frågar
B: ja
I: varför det blir så och fick du något svar på det?
B: nej, får oftast att det bara är så

Läraren sa vidare att de skulle skriva ner det hon skrev på tavlan, $-3 \cdot -3 = (-3)^2 = 9$ och $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$. Bernt fick möjligheter att rent tekniskt lära sig, genom att slå på miniräknaren och se att två negativa faktorer blir en positiv produkt, men han fick ingen förklaring till varför två negativa faktorer blir en positiv produkt. När jag sedan under intervjun håller för det läraren skrivit på tavlan och frågar Bernt hur man kan skriva tre multiplicerat med tre på ett annat sätt och då sa han först tre upphöjt till tre och när jag upprepade det han sagt, så sa han nej och att det är tre upphöjt till två. Sedan frågade jag Bernt hur man skriver minus tre multiplicerat med minus tre på ett annat sätt och då angav han först att det är minus tre upphöjt två men ångrade sig i nästa sekund och säger upphöjt till minus två.

I: hur kan jag skriva minus tre gånger minus tre på ett annat sätt?
B: minus tre upphöjt till två, upphöjt till minus två
I: minus tre upphöjt till minus två
B: minus två
I: vad är det som gör att det blir minus två där?
B: för att det är negativt tal, (tyst) nej vet inte

Bernt visade att han förstod att det handlar om att skriva talet med exponent, men att de negativa talen fortfarande skapade en osäkerhet hos honom. Jag skrev ner det Bernt sa och sedan fick han slå det han sagt på miniräknaren. När han slog det på räknaren, upptäckte han att det inte kunde vara upphöjt till minus två eftersom svaret blev för litet.

B: ska inte ha minus där
I: inte ha minus, hur kom du på att det inte ska vara minus
B: det blir för litet tal

Bernt skapade själv en kontrastering i negativ respektive positiv exponent som gav honom möjlighet att få syn på skillnaden mellan minus tre upphöjt till minus två och minus tre upphöjt till två.

Bernt kan ha fått kunskap från lektionerna; ex. L1:3 och L2:3, om att produkten blir positiv när båda faktorerna antingen är positiva eller negativa och om att två olika faktorer ger en negativ produkt, samt att en negativ exponent ger ett ”litet” tal. Han fick även under I2 slå $(-3) \cdot (-3) = (-3)^2 = 9$ och $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ på miniräknaren. Enar fick i text se sina tankar vilket skapade en fusion när flera kritiska aspekter upplevdes samtidigt; $- 3 \cdot -3 = (-3)^2 = 9$ och $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ och $(-3) \cdot (-3)$ inte var lika med $(-3)^{-2}$ utan $(-3) \cdot (-3) = (-3)^2$. Genom variationen och att få möjlighet att se olikheter och likheter i användandet av negativa tal, kunde möjligheterna för urskiljning skapas för Bernt i förståelsen när det blir en negativ produkt respektive positiv produkt, samt vad det är för skillnad på negativ respektive positiv exponent. Han gavs också möjlighet att lära sig när de olika minustecknen på räknaren skulle användas.

4. Vad möjliggjorde att Bernt klarade flertegslösning i ekvationsberäkning?

Bernt sa själv på L1:1 att variabeln inte endast behöver vara x utan att det kan vara vilken bokstav som helst, vilket kan bekräfta det jag tidigare skrev att han vet, att en bokstav ersätter ett siffervärde och siffervärdet ska tas reda på för att lösa en ekvation.

Läraren pratade om att ha gungbrädan i jämvikt under L1:4 och hur man kan räkna ut vad ett barn vägde. En elev sa att ett barn väger tolv eftersom fyra barn är samma som fyrtioåtta kilo. Läraren förklarade det eleven sagt genom att separera HL och VL (gungbrädans två sidor) och sedan stryka två barn från varje led och kvar är fyra barn i HL och fyrtioåtta kilo i VL. Sedan tog hon fyrtioåtta dividerat med fyra för att få fram vikten på ett barn. Därefter tecknade läraren ekvationen, $2b+48 = 6b$, och visade att de två ”suddade barnen” är samma som att skriva minus två b i båda leden i ekvationen. Genom att generalisera där det konstanta är att ta bort två barn i båda leden och variationen är symbolen för barn (bild på två barn eller 2b) kan lösningen av ekvationen lättare förstås. De följande lektionerna L1:5 och L1:6, gjordes på ett liknande sätt med bild, teckna och lös ekvation. Eleverna fick förtydligande genom att läraren separerade de två leden och markerade att det du gör i det ena ledet ska du göra i det andra ledet, vilket kunde ha skapat möjligheter att lära sig hur man löser ekvationer. Bernt inledde I3 med att tala om att han klarade att lösa potensekvationen och att han faktiskt var stolt över sig själv och därefter berättade han hur han hade löst ekvationen.

> B: där är ju x upphöjt till två inom parentes, minus tre upphöjt till två, är lika med hundratrettio
> I: mmm
> B: då tog jag bara och tog bort det där minus tre upphöjt till två
> I: mmm
> B: genom att slå in det på miniräknaren och se vad det blev, nio, och tar jag, ja x upphöjt till två plus nio är lika med hundratrettio där
> I: mmm, ja det står ju x upphöjt till två, plus nio minus nio är lika med hundratrettio minus nio
> B: ja
> I: du gör lika i båda leden, tar bort nio
> B :och tar bort nio där
> I: ja precis
> B: och sen fick jag x upphöjt till två ä lika med hundratjugoett och så tog jag roten ur där, och det är ju elva, så fick jag det

Bernt hade erfarit ett lärande i att lösa ekvationer/potensekvationer och han hade utvecklat alla de aspekter som han uppvisade svårigheter med på förtestet. Jag blev nyfiken på om han själv kunde utveckla vad det var som gjort att han lärt mer och han upplevde att det var under I2 när vi tillsammans tittade och resonerade om L2.

> I: negativa och x upphöjt till två, här har du löst det, vad är det som har gjort att du har kommit fram till lösningen?
> B: det var i går, när vi satt igår eller vad det var, och snacka igenom det

I vårt resonemang gavs Bernt möjligheter att få pröva och tolka sina lösningar mot andras lösningar, vilket kan ha bidragit till att Bernt utvecklade sitt lärande i att lösa ekvationer. Bernt likställde en variabels koefficients med en variabels exponent på förtestet eftersom han dividerade siffervärdet för att ta reda på variabeln när variabeln har en exponent. När Bernt och de i hans grupp arbetade med att ta reda på cylinderns radie hörde jag på bandupptagningen att han sa till Sara och Maja att han inte fattade och de frågade varför. Bernt svarade ” för att ni bara säger en massa siffror”. Han berättade sedan under intervjun (I2) att de tänkte mycket snabbar och förstod mycket bättre. Innan vi kom fram till filmsekvensen av L2:4 där han och de i gruppen hade skrivit sin lösning på tavlan, fick han försöka återge hur de gjort för att lösa den. Bernt hade svårigheter att redogöra för hur de gjort**.** Han hade själv skrivit lösningen av uppgiften, men både kubens uträkning och cylinderns uträkning hade han skrivit under kuben, samt ytterligare en uträkning under cylindern som han dragit ett kryss över. Han förstod inte vad och hur han hade gjort.

> B: det var här jag tappade bort mig lite och de kom före, jag vet inte var de fick fem ifrån precis

Innan vi återgår till filmen för att titta på deras lösning, nämnde Bernt att de pratade något om roten ur och att Sara och Maja försökte förklara för honom vad roten ur var, men att han inte hade förstått. Jag gjorde ett försök att se om han visste när man skulle ta roten ur.

> I: vad står det där egentligen, x upphöjt till två
> B: det står, där står x gånger x
> I: x gånger x är lika med
> B: lika med hundratjugoett
> I: och då vet du att, att ett tal gånger sig självt ska bli hundratjugoett
> B: ja, då får jag ta roten ur hundratjugoett
> I: ja
> B: (slår på miniräknaren) vilken var det, det är, det var, jag minns inte (knappen för roten ur)
> I: ja, jag ska visa dig, den där och så den
> B: ja, just det
> …
> I: förstod du det nu
> B: ja

Genom att han själv blev uppmärksammad på att det finns ett samband mellan $x \cdot x$ och x^2 och roten ur, tolkade jag det som om Bernt hade förstått när man ska ta roten ur, samt vad man får reda på när man gör det.

Bernt förstod även hur man slår roten ur på miniräknaren och att både två positiva faktorer och två negativa faktorer blir en positiv produkt. Återigen kunde det vara att han förstod att två negativa faktorer är en positiv produkt men inte varför det är så, för han har inte fått någon förklaring till det. Lösningen på uppgift 4 hade hans grupp skrivit på tavlan och när jag frågade honom om det under I2, sa han att han mest hade skrivit av när de skrev. När han skulle delge mig hur de löste uppgiften, tolkade jag det som att han kunde ha svårt att förstå att han kunde använda sig av en ekvationslösning för att ta reda på r på cylindern.

I: vad ett r är, ja, vad var det som var svårt här på vägen Bernt
B: dela med pi, och dela med, dela med grejer och ta bort grejer och så
I: är det att veta vad man ska göra
B: ja

Vi tittade på de andra gruppernas lösningar och jag bad Bernt berätta hur han trodde att de tänkt när de löst uppgifterna. Det han blev osäker på fick han pröva sig fram till med hjälp av papper, penna och miniräknare. Han upptäckte skillnader i uträkningarna vilket skapade olika former av variation av lösningar. Genom att gå igenom hans lösning och därefter gå igenom de andras lösningar skapades möjligheter att få syn på något mer och lära nytt. På den sista uppgiften, L2:6, hade han nedtecknat lösningar på två av dem på sitt papper. Bernt hade inte använt ekvationslösning utan gjort en numerisk räkning. När vi resonerade kring hans lösningar och kopplade det till det läraren skrev på tavlan, uppfattade jag att han började förstå att man ska gör likadant i båda leden. På uppgift 7b bad jag honom att försöka lösa uppgiften innan vi tittade på lärarens lösning. Precis när jag stängde av filmen hörde vi att läraren pratade om fem i kvadrat.

B: minus fem i kvadrat, nu måste L sagt fel
I :minus fem i kvadrat, mmm, vad betyder det
B: ingen aning, aldrig hört
I: då säger jag så här (skriver $(-6)^2$ och frågade, vad står det där
B: minus sex upphöjt till två
I: minus sex i kvadrat, man kan säga det alternativet också
B: okey

Bernt hade inte klart för sig uttrycken fem i kvadrat och upphöjt till fem. Precis som han ville veta varför två negativa faktorer blir en positiv produkt, så ville han veta varför läraren sa som hon gjorde. Här upplevde han en samtidighet i båda begreppen som kunde ha bidragit till lärande. Efter att jag delgett honom förklaringen, berättade han hur han skulle ha löst ekvationen.

B :mmm, tar minus tjugofem
I: mmm minus tjugofem
B: ja, minus tjugofem
I: vad har du kvar i vänster led
B: noll
I: har jag noll där?
B: va, a
I: a
B: a upphöjt till två
I: och vad har jag kvar i höger led?
B: hundra

I: hundra och vad gör jag nu
B: roten ur hundra

I samtalet oss emellan tror jag att när jag upprepar det han sa, ibland med en ren upprepning eller i en efterföljande fråga, men också med ett frågande eller förundrat kroppsspråk, så kunde han bli mer medveten om vad han sagt och skrivit. Detta kan ha bidragit till lärande i att han omvärderade det han sagt samt såg det på ett annat sätt.

ENAR

Enar och matematiken

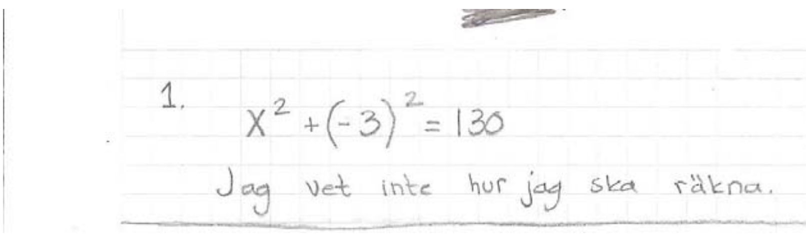
Enar har vad han minns alltid tyckt att matematik inte är ett lätt ämne. Ämnet matematik blev svårare på högstadiet. Ekvationer är det Enar alltid har haft svårast för enligt honom själv. I inledningen av intervjun framkom vad han tyckte om ekvationer.

E: mmm det där med ekvationer har jag alltid haft svårt för
I: vad är det som gör att det blir svårt med ekvationer
E: jag förstår det inte riktig så vet jag inte hur jag ska räkna ut det, det blir för många siffror
I: för många siffror i en ekvation förstod jag dig rätt
E: mmm tycker det är så krångligt att pussla ihop det på något sätt

Det var svårt för Enar att peka på vad det exakt kunde vara som gjorde att ekvationer var svårt. Det var bara svårt. Likadant var det för honom att förklara vad det var som hade gjort att matematiken överlag hade varit svår. På de nationella proven i årskurs nio hade han nått upp till G och det gjorde att han fick ett godkänt betyg och hade möjlighet att söka ett nationellt program. Enar går på ett nationellt program i årskurs ett och det är samma yrkes-förberedande program som den tidigare respondenten Bernt. Läraren i matematik på gymnasiet uppfattade i ett tidigt skede att Enar fick viss svårighet i matematiken.

Enars lösning på förtestet

På uppgiften (bil.A uppg.1 skrev han av uppgiften Enar och därefter skrev han ”Jag vet inte hur jag ska räkna”.


1. $x^2 + (-3)^2 = 130$
Jag vet inte hur jag ska räkna.

Enars lösning gjorde att jag inte hade något underlag utifrån förtestet i vad det kunde ha varit för svårigheter med uppgiften. När jag inledde intervjun efter förtest, med frågan till Enar vad det var som gjorde att han inte visste hur han skulle lösa uppgiften sa han:

E: nja alltså det här med till exempel x upphöjt till två och sen plus minus upphöjt till två inom parentes… jag vet inte riktigt hur jag ska slå in det på räknaren
I: är det det som är bekymret alltså
E: ja och så var det x också

Enar fortsatte att berätta att han försökte lösa uppgiften genom att prova sig fram, men han hade inte skrivit ner hur han gjorde. I vårt fortsatta resonemang försökte jag finna vari svårigheterna kunde vara i att lösa ekvationen. Han uttryckte först att det hade varit lättare om det hade stått tre upphöjt till två istället för minus tre upphöjt till två.

I: vad är det som hade gjort att det hade varit lättare
E: för då hade man kunnat ta det talet som blev över och ta
det minus hundratrettio och delat på två, så får man fram vad x:et blir

Vid flera tillfällen under intervjun, I1, återkom Enar till att ekvationer är svårt och att han inte vet hur han ska räkna ut det. Han tyckte att det här med ekvationer är krångligt och jobbigt. Sammanställningen av de svårigheter som framkommer i hans utsagor under intervjun var:

1. *tal och vairabler med exponent*
2. *negativa tal och minustecknets dubbla betydelse*
3. *”bokstavsräkning”*

Ur intervjun kunde jag inte utläsa hur han skulle ha skrivit lösningen av ekvationen och detta gör att jag inte vet om han skulle ha använt sig av ekvationslösning eller använt sig av numerisk räkning. De uppfattde svårigheterna, som jag tolkade att han fick, är alltså analyserade utifrån hans utsagor i intervjun. Utifrån de angivna svårigheterna beskriver jag nedan vad jag grundar dessa uppfattade svårigheter på.

1. Enars svårigheter i tal och variabler med exponent

I början av intervjun fick jag en uppfattning om att Enar kunde veta skillnaden på en exponent och kofficient eftersom han delgav mig att sex i kvadrat är lika med sex multiplicerat med sex.

I: okey vad betyder det att det står ett x
E: mmm… när det blir någonting gånger samma till exempel om det hade stått sex där så hade det varit sex gånger sex
I: mmm så x upphöjt till två betyder att man tar något tal gånger sig självt, är det det du säger?
E: mmm

När Enar sedan delgav mig hur han skulle löst uppgiften om det hade stått tre i kvadrat istället för minus tre i kvadrat så sa han:

I: okey du menar man delar sen och om det hade stått tre upphöjt till två, vad hade det blivit Enar
E: det hade blivit tolv

Enar fick tre i kvadrat att bli tolv och här får jag inte klart för mig hur han fick fram det svaret. Det kunde eventuellt ha haft en koppling till det han tidigare i intervjun delgett mig, det exemplet där han ville byta ut x:et i kvadrat mot siffran sex. Är hans tankar kvar i sex i kvadrat så kan han möjligtvis få det att bli tolv om han förväxlar addition och multiplikation och adderade sex med sex istället för multiplicerade. Hur han förstod och använde tal med exponent, kunde ha varit en bidragande orsak till svårighet i att lösa uppgiften. Sett till citatet ovan kan det finnas en osäkerhet i tal i kvardrat eller så gör han ett beräkningsfel.Vidare sa Enar att man ska dela för att få fram vad ett x blir när det är x i kvadrat på uppgiften.

E: nä för då hade man kunnat ta det talet som blev över och ta det minus hundratrettio
och delat på två så får man fram vad x:et blir

Min tolkning av det Enar sa är att han inte har klart för sig skillnaden mellan ett tal eller en variabel med exponent eller ett tal eller variabel med koefficient, samt att tal i kvadrat skapar svårigheter för honom.

2. Enars svårigheter i att räkna med negativa tal och minustecknet

Enar nämner att han inte visste hur han skulle hanterar negativa tal och hur han skulle slå det på miniräknaren. Han önskade också att det hade stått tre i kvadrat istället för minus tre i kvadrat, se citatet ovan, eftersom det hade varit lättare att lösa då.
När han berättade för mig hur han hade provat sig fram för att hitta en lösning så delgav han mig att han tror, att han först slog talet inom parentes och därefter slog han minus upphöjt till två.

I: och här har du (pekar på talet innanför parentesen)
E: minus tre upphöjt till två
L: och hur hade du slagit det på miniräknaren eller hur slog du det
E: nä jag slog väl det först inom parentes och sen minus upphöjt till två eller jaa
I: tog du minus upphöjt till två
E: nä nu blev jag lite osäker vänta (tittar på uppgiften)

Det fanns en osäkerhet kring minustalet kopplat till att det också fanns en exponent, om det är exponenten eller talet som skulle vara negativ när han slog det på miniräknaren.
Han kunde också ha haft svårt att hantera skillnaden på det minustecken inom parentes och minustecknet utan parentes på räknaren. Ytterligare en faktor som kunde ha bidragit till att negativ tal/minustecknet kunde skapat svårigheter för honom är hur han uppfattade dessa. Han sa i ett av citaten ovan att han tog det som blev över minus hundratrettio, vilket skulle ha gett en negativ differens.

Jag är osäker på om han dels förstår att det han just sagt skulle bli en negativ differens när termen efter minustecknet är större än den framför och dels om han ordagrant skulle ha skrivit det han sa eller om han skulle ha skrivit tvärtom, hundratrettionio minus det som blev över.

3. Enars svårigheter i ”bokstavsräkning”

Under intervjun, vilket jag tidigare uppgett, så tyckte Enar att det skulle ha varit lättare att räkna ut uppgiften om det hade stått en siffra istället för x.

> E: nja alltså det här med, till exempel x upphöjt till två och sen plus minus upphöjt till två inom parentes, jag vet inte riktigt hur jag ska slå in det på räknaren
> I: är det det som är bekymret alltså
> E: ja, och så var det x också

Enar återkom under intervjun att han inte visste hur han skulle räkna när det var variabler med och att ekvationer var svårt. Han sa att ekvationer är jobbigt och krångligt och att han inte ”riktigt har förstått hur man ska räkna”. Svårigheten för Enar kunde ha varit att han inte förstod innebörden av att lösa en ekvation och hur man ska gå tillväga för att lösa en ekvation. När jag frågar honom om vad det innebär att lösa en ekvation säger han ”Nja det vet jag inte riktigt.Enar upplevde att hela förtestet gick dåligt och testet som innefattade att både visa om man kunde teckna ekvation men också att lösa ekvation. Han delgav mig att ekvationer inte kändes bra vilket kan innebära att han tyckte att bokstavsräkning är svårt.

> I: det kändes inte bra
> E: nä
> I: det är ekvationen det, ja
> E: det är det som bromsar hela tiden

Enar berättade att det är lättare om det hade stått en siffra istället för bokstav och samtidigt kunde ekvationslösning varit svårt, dels för att han inte skrev någonting på förtestet och dels för att det blir en oklarhet i hans lösning av uppgiften (uppg.1).

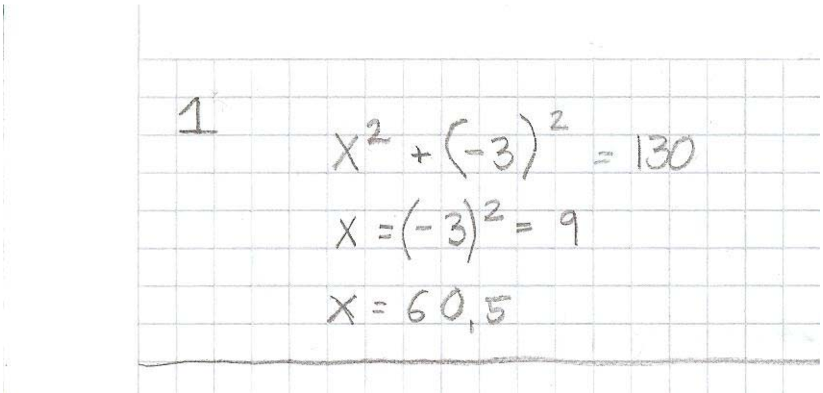
> I: vad är det som hade gjort att det hade varit lättare
> E: näe för då hade man kunnat ta det talet som blev över och ta det minus hundratrettio …

Det blir en oklarhet i om han hade använt sig av en numerisk räkning eller av en ekvationslösning och det som blev över tolkade jag under intervjun att det var det svar som tre i kvadrat blir. Här är det svårt att säga om han hade skrivit svaret och subtraherat det med hundratrettio eller om han hade skrivit hundratrettio och subtraherat det med svaret eftersom jag ställer vägledande frågor.

> I: och sen hade du tagit hundratrettio…
> E: minus tolv …
> I: och sen hade du delat det med två
> E: mmm

Enars lösning - eftertest

Följande lösning gör sedan Enar av samma uppgiften på eftertestet (bil.A):



1

$x^2 + (-3)^2 = 130$

$x = (-3)^2 = 9$

$x = 60,5$

På eftertestet kvarstod vissa svårigheter för Enar i att lösa ekvationer. Enar visade inte hur han fick fram det svar han har, men min tolkning är att han likställde en variabels exponent med en variabels koefficient för att få 60,5. Här framkom att han använder sig av numerisk räkning istället för ekvationslösning och jag uppfattade att Enar inte hade klart för sig hur man gör flerstegslösning i uträkning av akvationer. Han skrev först ett svar på x som var x = $(-3)^2 = 9$ och sedan på raden som följer står det att x = 60,5. Det som Enar kan ha utvecklat är förståelsen för är att ett negativt tal med exponent två är detsamma som att multiplicerat talet en gång med sig självt och att produkten blir positiv. Under intervjun efter eftertestet berättade han hur han fick fram lösningen på ekvationen.

E: ja och sen tog jag x är lika med inom parentes, minus tre upphöjt till två är lika med nio
I: mmm
E: och så tog jag hundratrettio minus nio och fick hundratjugoett
I: du tog alltså hundratrettio minus nio
E: mmm
I: är lika med hundratjugoett
E: ja och så tog jag hundratjugoett delat på två

Detta bekräftade det jag tidigare angav, att han använder numerisk räkning, samt att han likställde en variabels exponent med en variabels koefficient. Det som jag uppfattade under intervjun är att Enar kunde ha haft en förståelse för är att en ekvation består av två led, vilket grundar sig att han sa hundratrettio minus nio, vilket innebar att +9 blev -9 när det växlades över till andra ledet. Det bytte räknesätt och han visste att addition hör ihop med subtraktion. Vidare kunde Enar ha utvecklat en förståelse för negativa tal i och med att han uttryckte hundratrettio minus nio och därmed förstått att det blir en positiv differens och inte som han uttryckte det efter förtestet när det skulle gett en negativ differens ”tog det som blev över minus hundratrettio”.

Enar hade börjat få vissa redskap till att lösa en ekvation. Han vet att att man ska komma fram till variabelns siffervärde, att siffror byter räknesätt vid växling av led och att tal i kvadrat blir en positiv produkt oavsett om faktorerna är negativa eller positiva. Det Enar visar fortsatta svårigheter med är variabel med exponent.

1. **Vad möjliggjorde att Enar klarade tal med exponent?**

Under L2:2 fick Enar möjlighet att se skillnaden mellan $x \cdot x = x^2$ och $x + x = 2$, när läraren gör en kontrastering mellan dessa. Enar uttryckte att det förstod han och att det inte var något som var svårt.

> I: det var inga svårigheter? x gånger x är x upphöjt till två
> E: nej

Jag fortsatte att fråga honom om det följande där läraren skrev $a \cdot a \cdot a = a^3$ och $a + a + a = 3a$ om det var svårt med det tyckte han inte heller. I det som läraren skrev gjorde hon ytterligare en kontrastering samtidigt som hon gjorde en fusion när alla dessa exempel fick upplevas samtidigt, vilket kunde bidra till ny kunskap. Under L2:4 uppfattade jag att han förstod att en variabel i kvadrat är samma som variabeln multiplicerat med variabeln, genom att delge mig att r^2 är lika med $r \cdot r$.

> I: … ja det kan man säga och sen skriver du gånger r upphöjt till två och vad betyder r upphöjt till två
> E: radien gånger sig självt

Enar kunde som jag tolkade det, avkoda och förstå att ett tal eller en variabel med exponenten två är samma som att multiplicera talet/variabeln med sig självt, men svårigheten visade sig när han skulle omsätta den kunskapen och ta reda på siffervärdet på r. Han visade fortsatta svårigheter med att ta reda på siffervärdet på en variabel med exponent, eftersom han dividerar istället för att ta kvadratroten ur när han söker efter radien, $r^2 = 32,6$.

> I: vad hände här Enar, delar nu, ja du skriver att r är lika med trettiotvå komma sex, delat med två stämmer det
> E: mmm
> I: du fick att r var
> E: sexton komma tre

Den fortsatta svårigheten kan bero på att han rent tekniskt lärde sig vad r i kvadrat är men inte förstått innebörden och/eller kan han behövt se 2r och r^2 tillsammans för att kunna avgöra ”hur-jag-ska-räkna-ut” siffervärdet. Enar förstod det vid en jämförelse, kontrastering, mellan två variabler; $2x = x + x$ och $x^2 = x \cdot x$, men att sedan kunna generalisera sin kunskap och omsätta den i en uppgift skapade svårigheter. När han skulle ta reda på svaret i citatet ovan, likställde han exponent med koefficient.

Vi fortsatte att titta på filmen och nu fick han syn svaret de hade skrivit på tavlan och att det inte överensstämde med svaret som han fick när han skrev och berättade för mig hur de hade löst uppgiften. Genom en fusion; $2r = 32{,}6$, $r^2 = 32{,}6$, försökte jag synliggöra skillnaderna mellan variabel med exponent och variabel med koefficient. Ekvationslösningarna löstes parallellt i förhållande till helheten (32,6) och här skrev och förklarade jag hur jag löste dessa. Jag tog ytterligare ett exempel genom generalisering där jag höll r^2 konstant och varierade svaret; $r^2 = 32{,}6$ och $r^2 = 49$.
Han visste direkt vilket tal multiplicerat med sig självt som blir fyrtionio. När jag bad Enar att med miniräknarens hjälp visa hur man kan komma fram till att radien är sju, så visade det sig att han inte kunde använda räknare till det. Enar hade ingen aning om hur han skull slå det på räknaren, vilket jag instruerade honom i. Han slog sedan roten ur 49 och sedan roten ur 32,6 och såg att svaret överensstämde med det de hade skrivit på tavlan. Jag frågade honom vad det var som gjorde att det var svårt att ta reda på variabelns siffervärde och då sa han att han inte hade förstått hur han skulle göra och att det var läraren som hade gjort lösningen åt dem.

I: vem skrev det, läraren eller Albin?
E: det var läraren

När vi kom fram till L2:6, stoppade jag filmen efter att läraren skrivit $x^2 + 9 = 45$ och bad honom berätta hur han skulle löst ekvationen. När han kom till momentet i att ta reda på variabelns siffervärde, likställde han exponenten med en koefficient.

I: vad var det som gjorde att du fick arton där
E:jo för det står ju x upphöjt till två, och då tog jag trettiosex delat på två

Nu gjorde jag återigen en fusion i ett försök att få honom att se och förstå skillnaden på r^2 och $2r$ genom att skriva, $r^2 = 36$ och $2r = 36$, samtidigt som jag förstärkte detta i att få honom att berätta vad skillnaden är mellan r^2 och $2r$. Därefter bad jag honom att lösa de båda ekvationerna vilket han gjorde.

I: vad är skillnaden där Enar, hur skulle du räkna ut de här två olika
E: när det är x upphöjt till två så är det x gånger x
I: då skriver jag så x gånger x är lika med trettiosex och vad står det på den sidan
E: två gånger x
I: och det betyder
E: x plus två
I: x plus två
E: x plus x
I: x plus x är lika med trettiosex, hur ska du få fram det vilket tal gånger sig självt blir trettiosex och vilket tal plus sig självt blir trettiosex
E: arton plus arton blir trettiosex
I: ja och hur kunde du räknat ut det Enar, hur kunde du gjort med två x…
E: trettiosex delat på två
I: trettiosex delat på två x är lika med arton och vad gör du här … x upphöjt till två är lika med trettiosex
E: x delat på fyra
I: nu kommer du tillbaka till fyra
E: mmm
I: om du delar med fyra, hur hade det stått här då Enar
E: fyra x
I: som är lika med trettiosex, står det det
E: nä

I: nej, vad var det för speciellt med upphöjt till
E: ett tal gånger sig självt
I: och hur slår du det på miniräknaren
E: roten ur trettiosex

Jag uppfattade i lösningen här ovan att han fortfarande var osäker på skillnaden mellan exponent och koefficient, men han började förstå skillnaden mellan dessa. Enar delgav mig att $r^2 = r \cdot r = 36$ och $2r = r + r = 36$ och jag skrev det han sa för att synliggöra det sagda

$r^2 = 36$	$2r = 36$
$r \cdot r = 36$	$r + r = 36$
$6 \cdot 6 = 36$	$6 + 6 = 36$
$r = \sqrt{36}$	$r = 36/2$
$r = 6$	$r = 18$

Han fann siffervärdet på r och mina repliker kan ha väglett honom i att det var något annat än att man dividerar och därav slog han roten ur. Här kunde jag ändå uppleva att han fick en ökad förståelse för skillnaden mellan r^2 och $2r$. När Enar sedan fortsatte att göra 7b-uppgiften så löste han den korrekt.

I: hundra, a är lika med?
E: tio, är roten ur hundra
I: och a är lika med?
E: tio

I vårt resonemang utifrån intervjun, I2, så uppfattade jag att Enar förstått skillnaden mellan en variabels exponent och en variabels koefficient, när han delgav mig siffervärdet på uppgifterna, 7b-d L2:6. Han sa att man tar roten ur när varibeln har exponent för att finna siffervärdett, se citatet ovan. På eftertestet så visade det sig att en variabel med exponent fortfarande skapade svårigheter för honom. Han delade hundratjugoett med två när han har $r^2 = 121$.

I: är lika med hundratjugoett
E: ja och så tog jag hundratjugoett delat på två

Jag frågade honom här vad det kom sig att han delade med två och han svarade att det är för att det står x upphöjt till två.

I:sexti komma fem mmm vad är det som gör att du delar med två?
E:det står ju x upphöjt till två
I:mmm
E:å dä ä ju lika mycket som x gånger x

Utifrån citatet tolkade jag att Enar vet att x^2 är samma som $x \cdot x$, men han fick svårt att se skillnaden mellan x^2 och $2x$ och/eller hur man gör för att ta reda på vad ett x är när det är x^2. Han vet att ett tal med exponent, som $(-3)^2$, är samma som $(-3) \cdot (-3)$ men där det är en variabel i kvadrat fick han svårigheter.

2. **Vad möjliggjorde att Enar klarade negativa tal samt att hantera minustecknets dubbla betydelse?**

På L1, L2 och under intervjuerna använde Enar miniräknaren, vilket gjorde att han hade förutsättningar kontrollera och se rimligheten i sina beräkningarna.

Enar får precis som Bernt under L1:3 hör av läraren att två negativa tal blir en positiv produkt, samtidigt som läraren skrev $25 \cdot 25 = 625$ och $(-25) \cdot (-25) = 625$. Roten ur visade läraren med hjälp av miniräknaren när hon klargjorde för eleverna att man med hjälp av areans storlek på en kvadrat, kan få fram längden på sidan. Jag såg att Enar inte slog på miniräknaren när läraren visade hur man skulle göra. Det är svårt att säga om han inte uppfattade att han skulle slå det på miniräknaren, eller om han redan kunde hur han skulle slå det på räknaren. När vi tittade på filmen under I2 stoppade jag filmen innan vi kom fram till L2:3 och här frågade jag honom genom att skriva $3 \cdot 3$ och $-3 \cdot -3$ om han visste vad de blir.

> E:ja man tar minus gånger minus och då blir det plus, eller ja
> I: mmm
> E: nu vart jag lite osäker

Läraren skrev $(-3) \cdot (-3) = (-3)^2 = 9$ och $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ och bad eleverna att skriva ner det. Bernt frågade här vad det kom sig att två negativa faktorer blir ett positivt svar/produkt och läraren gav ett nytt exempel, se ovan under Bernt och sa till eleverna att slå talen på räknaren. Jag frågade Enar om han hade slagit talen på miniräknaren och han sa att han hade försökt men att det inte hade gått.

> I: slog du även det här nu, minus tre gånger minus tre
> E: ja jag försökte men det blev så där error
> I: okey vilket minustecken tog du, jag ska gå och hämta en miniräknare, vilket minustecken tog du
> E: det vanliga minustecknet

Han fick syn på att miniräknaren hade två minustecken och jag förklarade användningen av dem för honom. Jag uppmanade honom att prova med båda tecknen för att själv få syn på skillnaden. Därefter fick han slå minus tre multiplicerat med tre. Kontrasteringen kan ha möjliggjort förståelsen för minustecknen på räknaren, samt att lika faktorer ger en positiv produkt och olika faktorer ger en negativ produkt. I slutet av I2 frågade jag honom efter den första uppgiften under L2:6, om han förstod vad det är som gör att läraren angav plus och minus framför sexan i svaret. Enar sa att han inte visste det. Jag fick honom att reflektera över vad läraren skrev i början av lektionen, L2:2, kopplat till det han antecknat på sitt papper och han kom på att det kan vara två negativ tal eller två positiva tal som ger en positiv produkt. Vi återgick till filmen och på nytt frågade jag Enar vad det är som gör att läraren skrev plus minus framför sexan.

> I: vad är det som gör att läraren skriver både plus och minus
> E: det går att skriva på
> I: mmm
> E: bägge sätten

I: förklara nu Enar
E: för minus sex gånger minus sex, det blir ju både sex gånger sex och minus sex gånger minus sex blir ju positiv produkt

I uppgiften L2:6, 7a, skrev jag ner ekvationen och bad honom lösa den, utifrån att jag först frågade vilka lika faktorer som gav produkten tjugofem. Jag separerade de två ”lika” faktorerna och skrev dem för att skapa ytterligare förståelse för att två negativa faktorer blir en positiv produkt.

I: nu skriver jag fem upphöjt till två vad är det lika med
E: tjugofem
I: tjugofem det är tjugofem och vad kommer det sig att du säger att det är tjugofem
E: man tar ju talet gånger sig självt
I: japp du tar alltså fem gånger fem, och här står det minus fem upphöjt till två, vad blir det talet
E: tjugofem

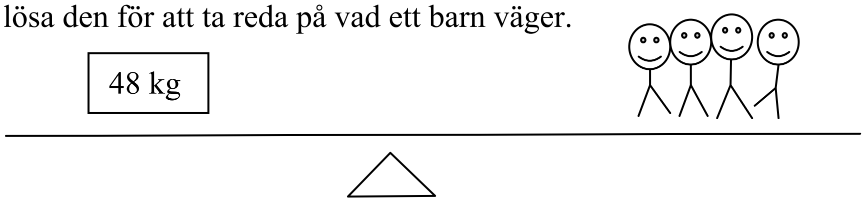
De resterande uppgifterna på L2:6 hade han inte löst, men vi gjorde dem tillsammans och lösningarna vi gjorde kontrollerades mot lärarens lösningar (såg vi på filmen). Enar uppmanades även att kontrollera att både ± siffervärdet stämde för i ekvationen. Han fick se att det stämde med både två negativa liksom två positiva faktorer och på så sätt kunde hans förståelse för att negativa faktorer blir en positiv produkt ha ökat.

I: varför skriver läraren plus minus
E: för det går att göra på två olika sätt

Enar gavs möjlighet utifrån flera exempel urskilja likheter och olikheter i negativ respektive positiv produkt. Han fick även ta del av och se skillnaden om han använder minustecknet inom parentes eller det utan parentes när han arbetar med negativa tal. På eftertestet så visade han att negativa tal liksom minustecknens dubbla betydelse inte skapade några svårigheter hos honom längre.

3. Vad möjliggjorde att Enar utvecklade ”bokstavsräkningen”?

Det första möjliga tillfället att få ta del av en ekvationslösning är under L1:4, vilket jag beskrev tidigare under Bernt. Läraren ritade bilden till uppgiften på tavlan och berättade att två av barnen (alla barnen väger lika mycket) på samma sida ramlar av gungbrädan, samtidigt som hon frågade vad som måste göras för att återta balansen på gungbrädan. Eleverna kom fram till att två barn på den andra sidan också måste hoppa av. Följande bild, se nedan, fanns sedan ritad på tavlan efter att läraren suddat ut två av barnen på respektive sida. Läraren frågade hur man kunde teckna en ekvation för händelsen och lösa den för att ta reda på vad ett barn väger.



Med hjälp av eleverna så tecknas och löses ekvationen på följande sätt:

$$
\begin{aligned}
\cancel{-2b} \qquad & -2b \\
\cancel{2b} + 48 &= 6 \\
48 &= 4b \\
b &= 12
\end{aligned}
$$

Enar, vad jag kunde uppfatta, skrev inte något under tiden läraren gick igenom lösningen på tavlan, men han följde läraren med blicken. Det som kunde ha gjort att Enar fick svårt att förstå hela ekvationslösningen var att läraren inte klargjorde hur hon fick fram att b=12 och dessutom växlade hon led på b och 12. De två följande uppgifter, L1:5 och L1:6, ritades, tecknades och löstes på ett liknande sätt. Enar fick på nytt möjlighet att följa med i en ekvationslösning. Det blev en variation genom en separation mellan uppgifterna L1:4 och L1:5 där utgångsläget i L1:4 är att teckna ekvationen till bilden och L1:5 är tvärtom, rita en bild till den tecknade ekvationen. Det som förblev konstant är att eleverna i båda uppgifterna skulle lösa ekvationen. L1:5 började med att eleverna skulle rita en bild till a+a+110+a = a+a+a+10+a+a och därefter lösa ekvationen. Lösa ekvationen gjorde de tillsammans:

$$
\begin{aligned}
\cancel{-3a} \qquad & -3a \\
\cancel{3a} + 110 &= 5a + 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-10 \qquad & \cancel{-10} \\
110 &= 2a + \cancel{10} \\
100 &= 2a \\
\frac{100}{2} &= a \\
a &= 50
\end{aligned}
$$

Under L1 erbjöds Enar möjligheter till att både teckna och lösa ekvationer, liksom vid L2. Han fick också i L2 och i intervjun efter L2 möjligheter att erfara skillnaden mellan variabels koefficient och exponent. Han redogjorde under L2:4 för en ekvationslösning när han skulle räkna ut radien på cylindern. Det jag uppfattade är att han förstod av ekvationslösning handlade om att söka efter värdet på variabeln och att en ekvation bestod av två led.

> E: för att man vill ha reda på radien
> I: det är radien man vill ta reda på
> E: mmm
> I: Jag ritar r upphöjt till två i höger led också vad är det som gör att man delar just på femton komma sju, vad gör man här med femton komma sju
> E: gångrar
> I: man gångrar ja man multiplicerar, och när du flyttar över till vänster led
> E: så delar man
> I: och vad kommer det sig att man delar
> E: för att gånger och delat med hör väl ihop

Enligt min uppfattning erfor Enar ett lärande när han på filmen fick se de olika stegen i lösningen som de skrivit till L2:4, samt prova sig fram med räknaren.

> I: å sen, vad hände sen då i nästa steg
> E: jaa sen då, femhundratolv … blev helt plötsligt femton komma sju gånger r upphöjt till två

I: vad är det som har förändrats från det som står tidigare där uppe (pekar mellan de olika stegen)
…
E: är det inte det att man tagit tre komma fjorton gånger fem
I: prova får du se, du får gärna slå det på miniräknaren, prova dig fram
(E slår på miniräknaren)
E: mmm femton komma sju

Hur läraren tillsammans med honom och Albin hade löst ekvationen blev först i intervjun mer tydligt och begripligt för Enar. Han hade under lektionspasset inte förstått hur läraren gjort när hon löste ekvationen. Enar kunde också få ökad förståelse för lösning av ekvation när han såg de andras lösningar, vilket också gav möjligheter för jämförelser i skillnader och likheter. I de andras lösningar hade de t ex inte multiplicerat ihop 3,14 och 5 utan dividerat med talen, ett i taget. Efter att ha gått igenom lösningen av radien till cylindern i L2:4, så kom en snarlik uppgift, L2:5. På den uppgiften skulle han istället räkna ut höjden av cylindern/brunnen. Han hade ekvationslösningen nedskrivet på ett papper och här delgav han mig att det var läraren som skrivit den på hans papper. Enar fick först försöka berätta hur de löst uppgiften och för varje gång han delgav mig ett nytt steg i lösningen så jämfördes det mot det som stod på hans papper. Att jämföra lösningar och att få återge hur de gick tillväga i att lösa ekvationerna kunde bidra till ökad förståelse för hur en ekvation kan lösas.

I uppgifterna till L2:6, 7b-d, så löste vi dem tillsammans, vilket jag tidigare beskrivit, och jag frågade honom vad det kom sig att han inte hade skrivit något. Detta motiverade han med att han inte orkade och hade varit lat. Jag hade aldrig i arbetet med Enar upplevt honom som lat och det gjorde att jag frågade vad som låg bakom latheten. Det visade sig att det inte handlade om lathet utan om att han inte hade förstått hur han skulle göra för att lösa ekvationerna. I slutet av I2 frågade jag honom om han själv upplevde att han började förstå ekvationer bättre och det tyckte han.

I: känns det som om du börjar förstå ekvationer något
E: ja lite bättre

På förtestet hade han inte skrivit något till uppgift1, men på eftertestet gör han ett försök att lösa ekvationen. Han inledde intervjun efter förtestet med att delge mig att han inte visste hur han ska lösa ekvationen till att göra ett försök på eftertestet. Det som hade gjort att han börjat försöka lösa ekvationer var att han erfarit ny kunskap i hur han skulle göra det.

I: vad är det som gör att du börjat försöka
E: det är väl det att vi har pratat på lektionerna om hur man skulle göra

Sammanfattande analys av Bernts och Enars förkunskaper och svårigheter i lärandeobjektet till ny kunskap om lärandeobjektet

Bernts och Enars uppfattade förkunskaper och svårigheter med lärandeobjektet

Bernt och Enar fick båda svårigheter på uppgift 1 på förtestet. Intervjun efter förtestet förstärkte i Bernts fall den tolkning jag gjorde av de svårigheter som framträdde för mig i analysen av hans lösning av uppgiften. I Enars fall innebar intervjun ett underlag för vilka hans svårigheter kunde ha varit med uppgiften, i och med att han inte skrev något alls på förtestet. De svårigheterna som visade sig vara gemensamt för dem båda var tal och variabel i kvadrat, samt negativa tal. När det gäller lösa ekvationer så hade Bernt svårigheter med flerstegslösning vid beräkning av ekvationen och i Enars fall var det att räkna med bokstäver. De analyserade svårigheterna (a-d) för Bernt och Enar var följande (fig3):

Bernt	**Enar**
a. aritmetiken/beräkning	**a**. ----------
b. tal och variabler med exponent	**b**. tal och variabler med exponent
c. negativa tal	**c.** negativa tal och minustecknets dubbla betydelse
d. flerstegslösning vid ekvations-beräkning	**d**. ”bokstavsräkning”

(fig.3)

Under intervjun uppfattade jag att Bernt visste att lösa ekvationer handlade om att hitta siffervärdet på variabeln, vilket inte framkom hos Enar. Enar sa att han inte visste hur han skulle göra. Bernt visade skriftligen att han använde sig av numerisk räkning och att han fick svårigheter med aritmetiken, vilket jag inte kunde utläsa i Enars lösning av uppgiften eftersom han inte skrev något.

Vad kunde ha möjliggjort lärande för Bernt och Enar?

Bernt och Enar har deltagit på samma lektioner med samma lärare och jag som intervjuar har intervjuat dem vid alla tillfällen. Skillnaden i förutsättningarna mellan lektionerna och intervjuerna är att de upplevde lektioner samtidigt, medan intervjuerna gjordes vid olika tillfällen för var och en av dem. Intervjuerna kan ha påverkat deras utsagor och möjligheter att lära. Under lektionerna skapades en variation i lärandet, liksom under intervjuerna. Bernt och Enar fick möjligheter att urskilja aspekter av lärandeobjektet där vissa aspekter hölls konstanta medan andra varierade, vilket resulterade i ny kunskap. Under lektionerna skapades följande variationsmönster ((K) - *kontrastering*, (G) – *generalisering*, (S) – *separation* och (F) – *fusion*), se fig. 4. Förklaringar till variationsmönster följer efter figur 4.

L1:3	K, G och K	
L1:4	K, och G	
L1:5	G	
L2:2	K och F	
L2:3	S, S, F och S	
L2:4	F och K	
L2:5	F	
L2:6	F och K	(fig.4)

L1:3 Läraren angav att även två negativa faktorer blir 625. Läraren visade hur de skulle slå på räknare och visade hur man beräknar arean; 25 · 25 = 625, samt poängterade att också -25 · -25 = 625 och bad dem slå -25 · -25 på räknaren. Läraren ritade därefter en ny kvadrat med arean 439 cm² och bad dem beräkna sidan.

<u>Kontrastering;</u> produkten är konstant men talen varierar: 25 · 25 och (-25) · (-25).

<u>Kontrastering;</u> kvadratroten är konstant och svaret varierar och ger ett kvadrattal som multiplicerat med sig själv ger talet i roten 625 liksom i roten 439.

<u>Generalisering;</u> där uträkningen, kvadratrot, av sidor med angiven area är konstans och det som varierar är kvadraternas area.

L1:4 Lärare ritade bilden med barnen på gungbrädan och med hjälp av bilden och överstrykningar kom de fram till vikten på ett barn. Därefter visade läraren hur man tecknar en ekvation till uppgiften, samt visade uträkning med en bokstavssymbol, b, och pratade om VL = HL och började skriva b+b+48=b+b+b+b+b+b och frågade eleverna hur man kan förenkla alla b:n och en elev sa sex b och en annan sa b upphöjt till 6. Läraren skrev på tavlan b+b+b+b+b+b= 6b och b·b·b·b·b·b= b6 och berättade skillnaden.

<u>Generalisering;</u> symboler varierar (och b) medan antalet och vikt är konstanta

<u>Kontrastering;:</u> b-termen är konstant men räknesätten däremellan varierar; 6b är inte lika med b^6

L1:5 Eleverna skulle rita en bild till den tecknade ekvationen, a+a+110+a = a+a+a+10+a+a. Läraren skrev upp den tecknade ekvationen och ritade en bild till, samt tillsammans med eleverna löstes ekvationen.

<u>Generalisering;</u> symboler (och a) varierar medan antalet och vikt är konstanta

L2:2 Läraren skrev på tavlan och även eleverna skulle skriva det:
$x \cdot x = x^2$ $x + x = 2x$ & $a \cdot a \cdot a = a^3$ $a + a + a = 3a$

<u>Kontrastering</u> eftersom x-termen är konstant medan räknesätten, liksom a- termen och därefter en <u>fusion</u> i att flera aspekter upplevs samtidigt; räknesätten konstanta och exponent och koefficient varierar $x \cdot x = x^2$ $x + x = 2x$
$a \cdot a \cdot a = a^3$ $a + a + a = 3a$

L2:3 Läraren skrev på tavlan: -3 · -3 = $(-3)^2$ = 9 och en elev frågade varför två negativa tal blir en positiv produkt och läraren förklarade genom att be eleverna använda räknaren och slå; -2 · 2 = och därefter -2 · -2 =. Läraren skrev sedan -3 · -3 = $(-3)^2$ = 9 och 3 · 3 = $(3)^2$ = 9.

<u>Separation</u> -2 · 2 = och -2 · -2 =, det som ska urskiljas separeras; faktorerna och svaret skall urskiljas och räknesättet är konstant

<u>Sseparation</u> 3 · -3 = $(-3)^2$ = 9, att 3 · 3 = $(3)^2$ = 9, det som ska urskiljas separeras och svaret är konstant

Läraren suddade därefter bort -2 · 2 = och -2 · -2 = och kvar på tavlan stod nu:

$x \cdot x = x^2$ $\quad x + x = 2x$

$a \cdot a \cdot a = a^3$ $\quad a + a + a = 3a$

$-3 \cdot -3 = (-3)^2 = 9$ $\quad 3 \cdot 3 = (3)^2 = 9$

<u>Fusion</u> i att flera aspekter upplevs samtidigt; räknesätten konstanta och exponent och koefficient varierar , samt att en <u>separation</u> görs samtidigt det som ska urskiljas separeras och svaret är konstant $x \cdot x = x^2$ $\quad x + x = 2x$

$a \cdot a \cdot a = a^3$ $\quad a + a + a = 3a$

$-3 \cdot -3 = (-3)^2 = 9$ $\quad 3 \cdot 3 = (3)^2 = 9$

L2:4 Eleverna fick i par/grupp lösa uppgiften och sedan skriva lösningarna på tavlan. Läraren gick igenom de olika gruppernas lösningar, flerstegslösningarna. Läraren poängterade bl.a. ”felet” som en grupp gjorde när de likställde r^2 med 2r.

Elevernas egna lösningar skapar urskiljning och flera kritiska aspekter upplevs samtidigt- <u>fusion</u>; helheten, svaret, bli konstant och variationen ligger i flerstegslösningen.

<u>Kontrastering</u> i att läraren lyfte fram $r^2 \neq$ 2r

L2:5 Eleverna skulle i par/grupp göra uppgiften och sedan skriva lösningarna på tavlan. Läraren gick igenom de olika gruppernas lösningar, flerstegslösningarna.

Elevernas egna lösningar skapar urskiljning och flera kritiska aspekter upplevs samtidigt- <u>fusion</u>; helheten, svaret, bli konstant och variationen ligger i flerstegslösningen.

L2:6 Läraren skrev upp fyra potensekvationer på tavlan som eleverna skulle lösa. . Läraren löste en ekvation i taget och visade flerstegslösningar av dem och avlutade med att säga att det finns två siffervärden till variabeln. En elev frågade vad det innebar och läraren drog en parallell till det hon skrev på tavlan i inledningen av lektionen (-3)·(-3)=9, 3·3= 9. Vidare sa läraren att (-6)·(-6)=36 liksom 6·6. Någon elev undrade om (-6) kunde vara svaret och läraren skrev $(-6)^2 + 9$ = och bad eleverna räkna ut det.

<u>Fusion;</u> flera aspekter upplevs samtidigt; konstant är att produkten blir positiv och faktorerna varierar (-3) · (-3) = 9 och 3 · 3 = 9 och (-6) · (-6) = 36 och 6 · 6 = 36

På tredje ekvationen poängterade läraren att -8 · -8 och 8 · 8 är sextiofyra.

<u>Kontrastering</u>; produkten konstant medan faktorerna varierar

Läraren avslutade varje lösning med att säga att siffervärdet på variabeln kan vara både positivt och negativt.

<u>Generalisering:</u> siffervärdena varierar medan ± är konstant på siffervärdena

Under intervjuerna skapades följande variationsmönster fig. 5 och förklaring som följer därpå.

	Bernt	**Enar**
I2 - L2:3	K, S, S och F	G och S
I2 - L2:4	F	F, S, K, G och K
I2 - L2:5	F	F
I2 - L2:6	K och S	K, S, och F

(fig.5)

Stimulated recall med Bernt

L2:3 När läraren skrev -2·-2 *kontrasterade* jag med -3·-3. Klargjorde också $3^3 = 3\cdot3\cdot3$ och $3^2 = 3\cdot3$ eftersom han först uttryckte att $3\cdot3=3^3$ och jag *separerade* i att trean var konstant medan exponenten urskiljdes. På (-3)·(-3) sa han att det kunde skrivas minus tre upphöjt till minus två. Skapade också en *separation* i att minus tre var konstant och bad honom slå $(-3)^{-2}$ och $(-3)^2$ och han förstod att det var $(-3)^2$ och slutligen gjordes en *fusion* där aspekterna upplevdes tillsammans och tillkom gjorde $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3$, samt (-3)·(-3) = 9 och (-3) ·3 = (-9).

L2:4 Bernt och jag gick igenom de andra elevernas lösningar och skapade en urskiljning i att flera kritiska aspekter upplevdes samtidigt vilket gav en *fusion* i ekvationslösningarna i flera steg, eftersom par/grupperna hade gjort olika i de olika stegen i lösningen för att få fram siffervärdet på variabeln.

L2:5 Vi gick igenom de andra elevernas lösningar även här och skapade en urskiljning i att flera kritiska aspekter upplevdes samtidigt, som L2:4, i en *fusion*.

L2:6 Jag *kontrasterade* i frågan vad 6·6 är och om något mer kunde bli 36, vilket han visste att (-6)·(-6) blev. Bernt uppfattade på filmen att läraren sa minus fem i kvadrat och menade att läraren sa fel. Detta gav en *separation* i att minus fem är konstant orden kvadrat och upphöjt till två urskiljs.

Stimulated recall med Enar

L2:3 Enar delgav mig att det inte är några svårigheter med $3 \cdot 3=9$ och $(-3) \cdot (-3)=9$. Jag frågade honom vad $(-6) \cdot (-6)$ är och han svarade -36, vilket gjorde att jag återknöt till $3 \cdot 3 = 9$ och $(-3) \cdot (-3)=9$, samt till vad $3 \cdot (-3)=-9$ är. Han förstod att $(-6) \cdot (-6) = 36$. Ovanstående gav en *generalisering* där produkten blev positiv av två negativa faktorer och det som varierade var talen, samt en *separation* i att det som skulle urskiljas var negativ respektive positiv produkt och det som varierade var positiv respektive negativ faktor.

L2:4 Enar och jag gick igenom de andra elevernas lösningar och skapade en urskiljning i att flera kritiska aspekter upplevdes samtidigt vilket gav en *fusion* i ekvationslösningarna i flera steg, eftersom par/grupperna hade gjort olika i de olika stegen i lösningen för att få fram siffervärdet på variabeln. *Separation* utifrån den lösningen de skrev på tavlan där Enar var osäker på hur de (E och han klasskamrat) hade fått fram $15{,}7 \cdot r^2=512$ från att ha varit $\pi \cdot r^2 \cdot 5 = 512$ i föregående steg i lösningen. Här kunde han se de båda stegen samtidigt och jämföra. Enar fortsatte att lösa ekvationen och hans siffervärde blev 16,2 och deras lösning på filmen var 5,7. Jag knyter an till L2:3, $x \cdot x = x^2$ och $x + x = 2x$ där det blev en *kontrastering*. Han angav att $r^2 = r \cdot r$, $r^2 = r \cdot r$ och $x^2 = x \cdot x$ vilket gav en *generalisering* samtidigt med en *kontrastering* $r \cdot r = 32{,}6$ och $x \cdot x = 49$, $x = \sqrt{49}$.

L2:5 Vi gick även igenom de andra elevernas lösningar och skapade en urskiljning i att flera kritiska aspekter upplevdes samtidigt, *fusion*, ekvationslösning i flera steg, men par/grupperna gjorde olika i de olika stegen i lösningen för att få fram siffervärdet på variabeln.

L2:6 *Kontrastering* i att han fick urskilja och $2x = 36$ och $x^2 = 36$ eftersom Enar menade att vid $x^2 = 36$ dividerar man. *Separation i att* ± 6 innebär $6 \cdot 6 = 36$ och $(-6) \cdot (-6) = 36$, kopplat till L2:3s: $3 \cdot 3 = 9$ och $(-3) \cdot (-3) = 9$. $(-5)^2 = 25$ och vet att även $5^2 = 25$. Här upplevdes flera aspekter samtidigt vilket även gav en *fusion.* Vidare så fick Enar ta del av att produkten blir positiv och faktorerna varierar $(-5) \cdot (-5) = 25$ och $5 \cdot 5 = 25$ och $(-6) \cdot (-6) = 36$ och $6 \cdot 6 = 36$ vilket gav ytterligare en *separation*.

Lärande för Bernt och Enar

Dessa lärtillfällen gav Bernt och Enar möjlighet att utveckla sin kunskap, vilket resulterade i att Bernt klarade eftertestet och Enar hade kommit ett steg till i ett försök beräkna ekvationer. Enar visste nu att beräkna ekvationer handlade om att få fram siffervärdet på en variabel. Se sammanställningen som följer av de svårigheter som kvarstår (fig.6).

Bernt	**Enar**
a. ------	a. -----
b. -----	b. variabler med exponent
c. -----	c. -----
d. -----	d. ekvationer - flerstegslösning

(fig.6)

Bernt hade utvecklat sina kunskaper i att lösa ekvationer och ingen av de svårigheter som han uppvisade på förtestet kvarstod på eftertestet. Enar gör en lösning på eftertestet vilket han inte gjorde på förtestet. På eftertestet fick han fortsatta svårigheter i variabler med exponent, samt att göra en flerstegslösning vid lösning av ekvationen. Enar likställer x^2 med 2x, samt använder sig av numerisk räkning när han ska lösa ekvationen. Bortsett från de negativa tal, gör Enar en liknande lösning på eftertestet som Bernt gjorde på förtestet. Han vet vidare att en ekvation handlar om att finna siffervärdet på variabeln.

> I: ja okey hur tänkte du ? x gånger x ? provar du det svar du får ? när du har en ekvation så kan man ju alltid prova ?
> E: mmm
> I: vad är det man alltid kan göra
> E: ta x eller jaa… det talet man får f ör x

Under lektionerna, intervjuer och på eftertestet hade de tillgång till miniräknaren, vilket jag tidigare nämnt. Detta kan ha gjort att aritmetiken inte skapade svårigheter. Bernt och Enar gavs även möjlighet att lösa ekvationer under lektionerna - flersteglösning och förstå att det de gör i det ena ledet ska de göra i det andra ledet i L1:4 – L1:7 och L2:4 – L2:6. Lektionerna byggde på en LS vilket gjorde att lektionsinnehållet var mer grundade i elevers uppvisade svårigheter, samplanerade, analyserade och medvetna i variationer i undervisningen.

Resultatdiskussion

Min studie byggde på lektioner som var utformade efter en LS och de utförda lektionerna var därmed mer samplanerade och välgrundade i elevernas förförståelse, vilket jag hävdar, bidrog till en större medvetenhet om lektionsinnehållet och dess betydelse för elevernas möjligheter i att lära. I en LS måste undervisningen förstås i att det är en interaktion mellan lärare och elever där lärarens och elevernas medvetande möts i lärandeobjektet. Lärarnas innehåll under lektionerna framställde lärandeobjektet som gav eleverna möjlighet genom variation att urskilja, uppfatta eller förstå på ett visst sätt. Mina intervjuer ska ses som ett sätt att försöka göra en djupdykning i att förstå Bernts och Enars betraktande av lärandeobjektet och deras lärande. Hur det gick till att lära sig härifrån till dit och deras resa till mot nya kunskaper. Jag har försökt beskriva det jag uppfattade utifrån deras perspektiv från förförståelse (förtest) till det erfarna lärandet (eftertestet) och hur deras väg såg ut (erbjudna lärandet). Mitt intresse har varit att följa eleverna i lärprocess och se vad det är som kunde ha gjort att de utvecklade sitt lärande i ekvationer. Det är ett försök att få ökade kunskaper om någonting som ledde till förbättring.

Teorin som jag valt att använda som tolkningsredskap är variationsteorin. Variationsteorin hjälpte mig att urskilja vilka möjliga vägar de gavs i att lära under lektionerna samt under I2 och I3. I det erbjudna lärandet erbjöds eleverna samma lektionsinnehåll, men utifrån deras egen förförståelse och den egna urskiljningen i variationerna i likheter och skillnader, skapade det lärande de tillägnat sig. Bernt kunde tillägna sig de kunskaper han behövde för att beräkna ekvationen, medan Enar visade fortsatta svårigheter med att lösa ekvationen (uppgift 1). Sett till deras nyvunna kunskap i eftertestet, tolkade jag att Enar befann sig likt där Bernt var på förtestet, vilket kan innebära att vi som lärare inte gav Enar möjligheter att lära utifrån ”hela” sin förförståelse.

De största framgångsfaktorerna hos dem båda var nyvunnen kunskap om att två negativa faktorer ger en positiv produkt och att tal i kvadrat är samma som ett tal multiplicerat med sig självt. Redan under första lektionen tas dessa framgångsfaktorer upp i variationsmönster, samt återkommer även på nästa lektion i liknande eller nya variationsmönster samt under intervjun efter andra lektionen. Variationsmönstren är fler och upprepas mer vid framgångsfaktorerna, både under lektionerna och under intervjun med mig. När det gäller variabel med exponent, förekommer det fler eller upprepade variationsmönster för Enar än hos Bernt vid intervjun med mig, och också vid beräkning av ekvationer förekommer ett variationsmönster mer hos Enar än hos Bernt. Hur kom det sig då att Bernt har lärt hur man beräknar en ekvation men inte Enar, trots möjligheter till fler variationsmönster?

En orsak kunde ha varit att alla elevernas förkunskaper och kritiska aspekter som förekom på förtestet analyserades och gav underlag för det erbjudna lärandet. Här fanns Bernts båda dessa faktorer med men inte hos Enars eftersom inga framträdde i skrift. Självkritiskt så kunde vi lärare i LS ha sett Enars svar som svårighet i att hantera det algebraiska språket och att han kanske inte hade förstått att algebran är generaliserad aritmetik och i hans fall utgått därifrån. En andra orsak kunde ha varit att variationen för Enar var otillräcklig och han kunde ha haft ett större behov av att få uppleva fler variationsmönster vid varje moment, samt fler exempel med variation. En tredje orsak kan ha varit det som utspelade sig i klassrummet när de arbetade i par och grupp, där Bernt som jag uppfattade det, arbetade med två klasskamrater som berättade och visade för honom hur de tänkte när de löste uppgifterna. Detta fick Enar aldrig möjligheter till, eftersom han och klasskamraten fick svårt att prata om uppgiften.

> E: ja för jag och Albin har ju svårt i matten

Enar menade att de båda hade svårt med matematiken och detta kunde ha bidragit till att Enar inte fick de möjligheter som Bernt fick till ytterligare urskiljning i beräkningar genom sina klasskamrater. Enar och Albin fick vägledning av läraren med L2:4 och L2:5, men enligt Enar förstod han inte vad läraren gjort när hon visade uppgifterna eftersom det hade gått för fort. Dessa uppgifter kräver att man har en medvetenhet om hur man löser ekvationer samt att kunna omsätta det till formelbladet.

Enar fick svårt på under lektionen att lösa uppgifter och det gjorde som jag tolkade det, svårt för honom att upptäcka, urskilja och förstå olika aspekter även vid genomgång av elevernas olika lösningar. Enar kunde med andra ord ha svårt följa med i lektionsinnehållet. Det hade även, enligt Enar, gått för fort när läraren gick igenom L2:6 – ekvationslösningarna – och det kan ha varit en förklaring till att han inte förstod. Bernt och till viss del Enar fick uppleva ”magiska” ögonblick i lärandet och de förlorade möjligheterna för Enar kan grunda sig i hans ”missade” förkunskaper, otillräcklig variation i lektionsinnehållet samt förlust av klasskamraters sätt att lära och lära av dem.

Enar menade att de båda hade svårt med matematiken och detta kunde ha bidragit till att Enar inte fick som Bernt möjligheter till ytterligare urskiljning i beräkningar genom sina klasskamrater. Enar och Albin fick vägledning av läraren med L2:4 och L2:5, men enligt Enar förstod han inte vad läraren gjort när hon visade uppgifterna eftersom det hade gått för fort. Dessa uppgifter kräver att man har en medvetenhet om hur man löser ekvationer samt att kunna omsätta det till formelbladet. Enar fick svårt på dessa uppgifter och det gjorde som jag tolkade det, svårt för honom att upptäcka, urskilja och förstå olika aspekter även vid genomgång av elevernas olika lösningar. Enar kunde med andra ord ha svårt följa med i lektionsinnehållet. Det hade även, enligt Enar, gått för fort när läraren gick igenom L2:6 – ekvationslösningarna – och det kan ha varit en förklaring till att han inte förstod. Enars ”missade” förkunskaper, eventuella brister i variationen samt förlust av klasskamrats sätt att lära och lära av dem, menar jag kan vara en bidragande orsaker till förlorade möjligheter att utveckla ny kunskap.

Resultatet visar på att elevernas förförståelse och svårigheter av ett lärandeobjekt är av betydelse för hur de kan uppfatta, urskilja och tillgodogöra sig nya kunskaper. Bernt kunde erfara lärande utifrån sina förkunskaper och tillgodogöra sig det han behövde utveckla i variation i det erbjudna lärandet. Det framställda lärandet gav inte Enar samma möjligheter. Vidare visar resultatet på att variationen i det erbjudna lärandet skapar förutsättningar till fler möjligheter att urskilja. Hur kan jag lära mig att $2x \neq x^2$ om jag inte får möjligheter att urskilja det? Det som varierar kan vi urskilja. Kunskapen om elevernas förkunskaper/förförståelse och de svårigheter lärandeobjektet kan skapa och elevernas egna utsagor, hävdar jag utifrån studiens resultat, att det är viktig kunskap för varje lärare i planering av lektionsinnehållet av lärandeobjektet och för varje elevs lärande.

Diskussion

I föregående avsnitt har resultat diskuterats utifrån min empiri och hur den kan tolkas och förstås. I den avslutande delen diskuteras dess pedagogiska implikationer mer generellt och i relation till forskning.

Min erfarenhet, resultatet av den här studien och tidigare studier visar att algebra är en stöttesten för elever. Det som blir ett komplement i min studie till de tidigare studier jag hänvisat till, är att den lyfter fram och ger en fingervisning om hur elever lär och utvecklar ny kunskap utifrån deras egna utsagor. Eleverna gavs i undervisningssituationen och vid intervjutillfällena olika möjligheter i att lära i variationen. Variation i undervisningen kräver en allt större fokus på, och kunskap om ”hur-skapas-variation”, samt en förståelse för elevers olikheter i förförståelse och deras förkunskap. Den rådande synen på elevers förkunskaper blir oftast likställd med likhet, eftersom eleverna har ett betyg med sig, vilket med kursplanemålen mätt anger ”att-det-här-kan-eleven”. Undervisningskultur blir ett förgivettagande om att det här kan eleven redan, eftersom han har ett betyg, men i betyget framkommer varken vad elevens faktiska kunskaper är eller vad i undervisningen som gör att han lär. Om undervisande lärare får svårt att uppmärksamma varje elevs faktiska förkunskaper och vad det är i undervisningen som gör att han lär, så finns uppenbar risk för svårigheter i att lära. Förkunskaperna har betydelse för elevernas lärande vilket också Wernberg (2009); Marton & Booth, 1997; Runesson (1999; 2000;2004; 2005;); Pettersson (2007) ; Persson (2010) och Holmqvist (2001) framhäver i sina studier. För att nå lärandeobjektet måste man ta reda på elevernas förkunskaper och se vilka svårigheter, s.k. kritiska aspekter som finns för lärandet. Häggström (2008) betonar att det finns en relation mellan lärande och undervisningen samt hur innehållet behandlas, vilket har betydelse för de lärande. Detta tycker jag min studie kan bestyrka.

Elevers och lärares uttryck av att ha svårt att förstå, kan tolkas som ett behov av att det behövs en ökad kunskap om förhållandet mellan undervisning och lärandet. Jag vill hävda att det är viktigt för lärare att känna trygghet i och ha kunskap i hur lärandet kan förändras och utvecklas. Lärarna kan se de faktiska kunskaperna som en grund att bygga vidare på samt att de kunskaperna som eleven tillförskaffar sig under lektionen behöver reflekteras över. Vad gjorde att de lärde respektive inte lärde sig? Marton och Booth (1997) ser undervisning och lärande som två sidor av samma mynt, intimt förbundna med varandra, vilket jag menar inte kan motsägas. Att analysera sin egen undervisning i relation till elevernas lärande med fokus på lektionsinnehållet kan göra ett erfarande för lärarna själva. Författarna betonar också att människor är olika och världen framstår olika för olika människor och människor lär sig saker på vitt skilda sätt.

Nuthall (2004) uttrycker att lärares fokus oftast ligger på elevernas delaktighet d v s hur de uppför sig, den motivation och förmåga de uppvisar i att avsluta en aktivitet istället för vad de faktiskt lär. Jag delar författarens erfarenheter både i egenskap av lärare och som specialpedagog i ett nära arbete med andra lärare kring elever i behov av särskilt stöd. Att fokus inte har varit på vad i lektionsinnehållet som gör att eleverna lär förstärks av Holmqvist (2006) och Runesson (1999) erfarenheter där författarna menar att fokus har varit på vilken metod som ska användas i undervisningen. Undervisning och lärandet är sammanflätat och lektionsinnehållet har en avgörande betydelse för varje enskild elevs lärande. Det tidigare fokus på *hur- kultur*, håller enligt Carlgren & Marton (2007) på att övergå till *vad – kultur*. Det centrala för läraren blir vad eleverna ska lära sig och hur de kan ges möjlighet att lära sig detta. Intresset för variationsteorin och dess inverkan på lärandet i flera studier, kan vara ett bevis på att ett skifte håller på att ske från hur till vad och där fokus flyttas till vad som krävs för att erfara och lära. Variationsteorin är en teori som ser till formen av variation – vad i undervisningen som möjliggör en positiv utveckling av elevers förmågor och kompetenser. Det är ett perspektivbyte från hur lärande sker till vad lärande innebär och lärandets innehåll och struktur lyfts fram (Marton & Booth, 2000).

Variationsteorin kan bidra till att se lärandet som förändrat lärande. I variationsteorin så menar jag att lärande är att erfara och lärandet blir ett förändrat erfarande. När man intar ett annat perspektiv och ser saker på ett nytt sätt och förstå något mer som i det exemplet jag tidigare angav, att 2x inte är samma sak som x^2. En dag blev jag tvungen att låna en annan bil av ett annat märke än den jag brukar köra och gjorde då en upptäckt att backen inte läggs in på samma sätt som jag var van vid. Den nya kunskapen blev för mig att växellådans funktioner kan se olika ut hos olika bilmärken, vilket jag inte hade erfarit om jag inte upplevt skillnaden. När en sak hålls konstant kan jag inte urskilja några andra aspekter men när det uppstår en variation så kan jag se och lära något nytt. När saker hålls konstanta i undervisningen blir det mycket svårare för eleverna att urskilja, medan saker som varierar är lättare att upptäcka. Genom variation får de lärande möjligheter att få syn på kontraster i skillnader och likheter.

Jag har tidigare varit inne på att läraren måste förstå hur deras eget agerande i lektionsupplägg, utförande och val av uppgifter påverkar den lärande. Stöd av skolledning och samplanering med andra ämneslärare, tror jag kan leda till ”vinst” för alla parter samt att det ger en trygghet och ett stöd i att utveckla sin undervisning. Som lärare kan man använda sin tidigare erfarenhet och sina egna kunskaper som lärare, samt ett förtest som en utgångspunkt och försöker planera och tolka lektionsinnehållet i ljuset av detta. Alla pedagoger inom skolan ansvarar för elevernas lärande, och jag upplever att vi alla behöver ges möjligheter i att bli bättre på att se hur undervisningen hänger samman med elevernas lärande. Tidsfaktorn kan vara ett moment som gör att lärarna känner sig tidspressade och inte får tiden att räcka till, till samplanering och analysering över lektionsupplägget/lektionsinnehåll och elevernas lärande.

Om man känner sig ”stressad/pressad” så är det sannolikt att ta till att jag kör som jag brukar för att hinna med kursen. Fokus ligger då mer på att hinna med en aktivitet än att anpassa aktiviteten till de lärandes förutsättningar. Att granska sin egen syn på lärande och kunskap tror jag är en framgångsfaktor inte bara för elever utan också i att underlätta för sig själv som lärare i att få elever att lyckas och utveckla sina tidigare kunskaper. Jag skulle vilja säga att det blir en progression i att hela tiden utveckla sin profession som lärare. Arbetat tillsammans med kollegor kring ett lärandeobjekt förekommer allt för sällan, enligt min erfarenhet, vilket gör att kunskapen om hur andra lärare handhar undervisningsinnehållet förblir privat. Sammantaget kan den privata kunskapen bidra både med andra perspektiv och också tolkningar av exempelvis ett förtest samt idéer på olika variationer inför planering av ett lektionsinnehåll. När lärarna skapat sig en medvetenhet om variationen kan de också bli medvetna om att undervisningen skulle kunna läggas upp på fler sätt som kan utveckla elevers lärande. Jag upplever att den bedömning som eleverna får fokuserar mer på kunnandet än lärandet, vilket kan bero på att det finns för lite kunskap i hur elevers lärandeprocess går till. Att utgå från elevernas förkunskaper och använda variationsteorin innebär att förstå den kunskap en elev har och därefter skapa lektionsinnehåll med variation, som kan möjliggöra lärande för eleverna. Frågor att kunna använda i arbetslaget kan vara: Vad innebär det att lära sig det här? Vad behöver eleverna kunna för att lära sig det här? Vilka förkunskaper har eleverna av lärandeobjektet? Hur kan jag variera lektionsinnehållet så att lärandet möjliggörs för alla elever?

Det är av betydelse för eleverna, upplever jag, att vi specialpedagog och lärare kan mötas för att hjälpas åt att utveckla undervisningen och för att försöka undvika att eleverna hamnar i att ”Jag fattar inte” och blir ett ärende för specialpedagogen. I mitt möte med elever har jag försökt skapa variation utifrån det som av eleven har upplevt som svårt. Enligt mina erfarenheter har det varit ett litet intresse från lärarna att vilja ta del av vad jag som specialpedagog gör för att möjliggöra lärandet. Ingen elev kanske skulle behöva enskild undervisningsinsats från specialpedagog om samplanering fanns, pedagogiska diskussioner fördes i och kring lärandet av ett lärandeobjekt och att en rikare variation gavs utrymme i den ordinarie undervisningen. Tilläggas ska också göras att under mina femton år, både som lärare och specialpedagog, aldrig har mött någon lärare som pratat om eller utgått från elevernas faktiska förkunskaper och utvecklat lektionsinnehållet utifrån det. Min övertygelse är att samarbete mellan oss pedagoger kring alla elever i t ex en learning study öppnar upp för nya perspektiv för variation i undervisningsmoment som kan skapa större förutsättningar för elever att tillgodogöra sig undervisningen och lärande och därmed utvecklas och ”växa” som person. Learning study blev en del av min studie och lektionerna var samplanerade. Jag var en part i LS studien, vilket gav fler perspektiv vid analysen av förtest och på variation. LS gav mig även möjligheter att följa elevers lärandeprocess, både i undervisningen och i intervjuerna.

Mitt kunskapsbidrag är att visa vikten av att se elevernas förkunskaper/förförståelse och de svårigheter lärandeobjektet kan innefatta för elever, samt hur viktigt det erbjuda lärandet är för varje enskild elev. Att se förkunskaperna tillika svårigheter kan bli synbart på ett förtest och i elevers egna utsagor. Elevernas förkunskaper är ett viktigt bidrag till lektionsplaneringen, annars gissar man/antar man deras förkunskaper inför lärandeobjektet. Utvecklingen av elevernas förståelse måste börja där eleven befinner sig och sambandet mellan elevens lärande och lärandemiljön måste synliggöras och förstås. Att som lärare kunna ge eleverna goda kunskaper i algebra är av betydelse för hur eleverna lyckas med matematiken både på gymnasiet och för högre studier, vilket Persson & Wennström (2002) och Olteanu (2007) också framhäver i sina studier. De algebraiska procedurer som eleven inte kan relatera till informella och meningsfulla sammanhang skapar svårigheter hos eleverna och här har vi lärare en viktig roll att förbygga detta.

Studien har väckt nya frågeställningar hos mig;

1. Hur kan vi lärare veta vilket lektionsinnehåll i ett lärandeobjekt som bidrar till nya kunskaper för varje elev om vi inte utgått från elevernas förkunskaper? I Lpf 94 där det står att läraren ska anpassa undervisningen till varje elevs förutsättningar och behov samt att rektorn har ansvar för att organisera undervisningen så att eleverna kan börja på en nivå som bestäms av deras förkunskaper.
2. Hur vet vi lärare vad i lektionsinnehållet som bidrog till nya kunskaper om vi inte analyserar lektionsinnehållet och kopplar det till vad eleverna lärde sig? Återknyter återigen till Lpf 94 där det står att de väsentliga för skolan är att skapa de bästa samlade betingelserna för elevernas bildning.
3. Kan vi lärare utveckla vår egen profession genom att låta eleverna undervisa oss i sitt lärande? Utbildning ska vara en aktiv process där eleven är med och delger sitt lärande och därmed sina vägar till kunskap (SOU, 1992:94).

Litteraturförteckning

Bell, Judith. (2000). *Introduktion till forskningsmetodik.* Lund: Studentlitteratur.

Bergsten,C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). Algebra för alla. *Nämnare Tema*.

Bigsten, A. & Orlenius, K. (2006). *Den värdefulla praktiken*. Stockholm: Liber.

Bowden, J. (1994): *Experience of phenomenographic research: a personel account.* In Bowden & Walsh (Eds.): Phenomenographic research: Variations in method. The Warburton Symposium. Melbourne: EQARD.

Carlgren, I. (2005). Praxisnära forskning – varför, vad och hur?. *Forskning av denna världen II – om teorins roll i praxisnära forskning* (s.7-16). Uppsala: Vetenskapsrådet (The Swedish Research Council).

Carlgren, I. & Marton, F. (2007). *Lärare av i morgon.* Stockholm: Lärarförbundet.

Emanuelsson, J. (2001). En fråga om frågor: hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturkunskap. (A question about questions: How teachers´ questioning makes it possible to learn about the students´ ways of understanding the content taught in mathematics and science). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburginis. Hämtad maj 2009 på http://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/8448/1/Emanuelsson_Dissertation.pdf

Haglund, B. (2003). Stimulated recall. Några anteckningar om en metod att generera Data. *Pedagogisk Forskning i Sverige 2003 årg 8 nr 3* (s.147-157).

Hartman, J. (2004). Vetenskapligt tänkande. Från kunskapsteori till metodteori. Lund: studentlitteratur.

Holmqvist, M. (red.) (2006). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: studentlitteratur.

Häggström. J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: hat is made possible to learn?*. Göteborg Studies in Educatinal Scince. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburginis.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F.K. Lester (Ed). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Larsson, S. 1986: *Kvalitativ analys: exemplet fenomenografi.* Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla*. Lund: Studentlitteratur.

Maltén, A. (2003). *Att undervisa.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. (2005) Praxisnära forskning – varför, vad och hur?. *Forskning av denna världen II – om teorins roll i praxisnära forskning* (s.105-122). Uppsala: Vetenskapsrådet (The Swedish Research Council).

Marton, F. & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Mahwah, N.J. : Lawrence.

Marton, F & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. 2004. The space of learning. In F. Marton & Tsui, A (Eds), *Classroom discourse and space of learning*. (pp.3–40). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Tsui, A. (2004). *Classroom discourse and space of learning*. Mahwah, N.J. : Lawrence Erlbaum.
Nuthall, G. (2004). *Relating Classroom Teaching to Student Learning*. Harvard Educational Review; Fall 2004; 74, 3, s.273-306.
Olteanu, C. (2007). *”Vad skulle x kunna vara?: andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande* (”What could x be?”: second degree equation and quadratic function as objects of learning). Institutionen för beteendevetenskap, Högskolan i Kristianstad.
Pehrson, I. (2002). Algebrafördjupning. *Nämnaren*, 29(2), s.27-31.
Persson P-E (2005). *Bokstavliga svårigheter. Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebratänkande.* (Literal difficulties. Factors that influence algebraic learning for upper secondary students). Luleå: Institutionen för matematik, Luleå tekniska universitet.
Persson, P-E. & T, Wennström. (2000). Algebraisk förmåga och förståelse, del 2. *Nämnaren*, 29(1), s.22-29.
Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* (The pedagogy of variation: different ways of handling mathematical topic). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburginis.
Runesson, U. (2000). Variation för lärande. *Nämnaren*, 29(2), s.19-25.
Runesson, U. (2004). Med lärandets innehåll i fokus. *Nämnaren*, 29(1), s.34-37.
Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. The Cambridge Journal of Education, 35(1), 69-87.
Runesson, U. (2008). Learning to design for learning. The potential of learning study to enhance learning on two levels: Teacher’s and students’ learning In T. Wood (Series Ed.) & P. Sullivan (Vol. Ed.), *International handbook of mathematics teacher education:/ /Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
Skolverket (1999). *Det långa och livsvida lärandet.* Skolverket 1999: 121. Stockholm: Liber.
Skolverket (2000). Kursplaner och betygskriterier. Gymnasieskolan. Stockholm: Fritzes
Skolverket. (2004a). TIMSS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv. (Rapport 255). Stockholm: Skolverket.
Skolverket. (2004b). PISA 2003. Svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv. Stockholm: Skolverket.
Skolverket. (2008a). TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv. (Rapport 323). Stockholm: Skolverket.
Skolverket. (2008b). PISA 2003. Svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv. Stockholm: Skolverket.
SOU (1992:94). *Skola för bildning.* Huvudbetänkande av Läroplanskommittén. Stockholm: Utbildningsdepartementet

Starrin, B. (1994). Om distinktionen kvalitativ – kvantitativ i social forskning. I Starrin, B. & Svensson, P-G, (red.). *Kvalitativ metod och vetenskapsteori.* Lund: Studentlitteratur.

Uljens, M. (1989). *Fenomenografi: Forskning om uppfattningar*. Lund: Studentlitteratur

Utbildningsdepartementet (1994). *Läroplan för de frivilliga skolformerna, Lpf 94*. Gymnasieskolan, gymnasiesärskolan, den kommunala vuxenutbildningen, statens skolor för vuxna och vuxenutbildningen för utvecklingsstörda. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Vetenskapsrådet (2002). Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna.* Umeå: Umeå universitet, Teknisk-naturvetenskapliga fakulteten, Institutionen för naturvetenskapernas och matematikens didaktik.

Ödman, P-J. (2007). Tolkning, förståelse, vetande. Hermeneutiken i teori och praktik. Stockholm: Nordstedt Akademiska Förlag

Förtest tillika Eftertest

Följande uppgifter skall lösas så långt det är möjligt. Försök att i första hand lösa uppgifterna med ekvationer. Endast uträkningen kommer att bedömas.

Sätt   = 3.

1.Lös ekvationen så att du får reda på vad ”X” blir: $X^2 + (-3)^2 = 130$

2. Kvadratisk Hage

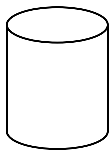
Pia köpte 200 meter staket och gjorde en kvadratisk inhägnad.

– Varför gör du inte en större hage? Undrade Petra.

– Det här är den största hage jag kan göra av 200 meter staket, svarade Pia.

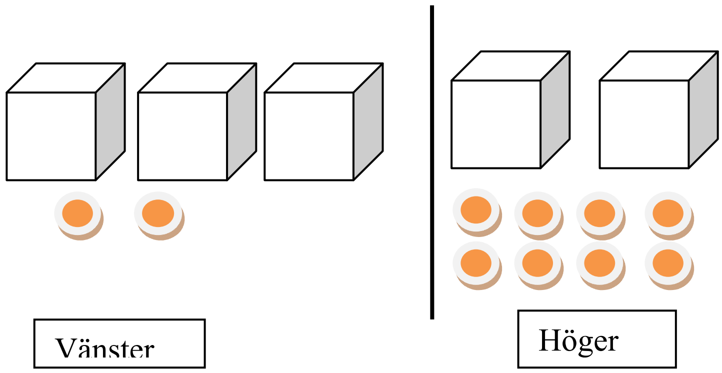
Har Pia rätt eller hur stor hage kan man göra av 200 meter staket?

3. En hink som är cylindrisk rymmer 10 liter vatten. Hinkens höjd är 35 cm.
Vad har hinken för radie?

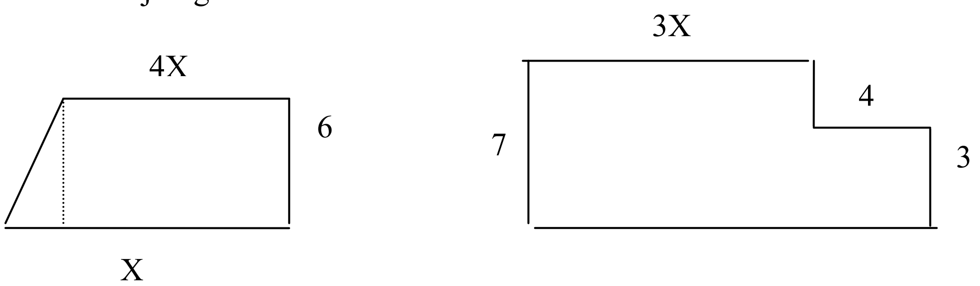


4. Hur många kakor rymmer burken?

Utifrån följande exempel skall du ställa upp en ekvation. På vänster sida finns 3 burkar och 2 kakor. På höger sida finns 2 burkar och 8 kakor. Det är lika mycket kakor på varje sida. Lös ekvationen.



5. Figurerna nedan har lika stora areor. Teckna och lös en ekvation så att du kan räkna ut arean av varje figur.

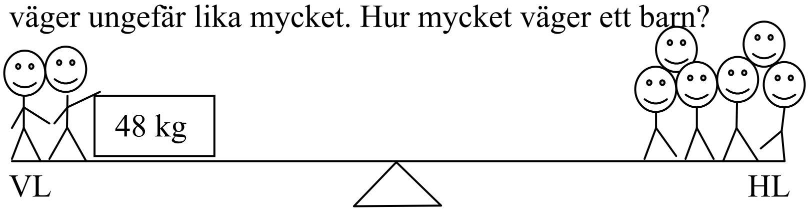


Bilaga B

UPPGIFTER UNDER LEKTIONEN

Uppgift 1.

Barnen på dagiset Fjärilen har ställt sig på en gungbräda och det väger jämnt. Varje barn väger ungefär lika mycket. Hur mycket väger ett barn?

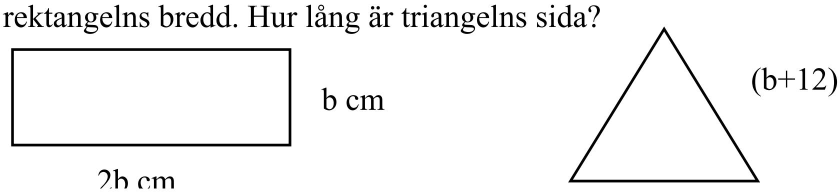


Uppgift 2.

Gör en egen uppgift med utgångspunkt från Uppgift 1. Rita en bild och lös ekvationen $a+a+110+a = a+a+a+10+a+a$.

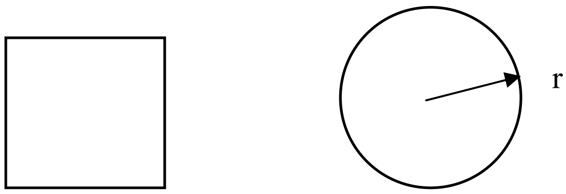
Uppgift 3.

Rektangeln har lika stor omkrets som den *liksidiga* triangeln. Rektangelns längd är dubbelt så lång som bredden och ytterligare 6 cm. Triangelns sida är 12 cm längre än rektangelns bredd. Hur lång är triangelns sida?



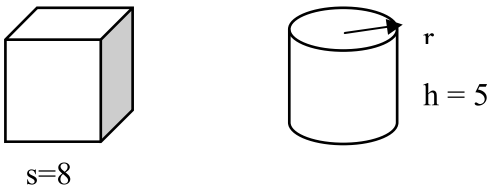
Uppgift 4.

Kvadraten och cirkeln har båda samma omkrets. Omkretsen är 100 cm. Har de lika stora areor? Använd din formelsamling!



Uppgift 5.

Kuben och cylindern har lika stora volymer. Beräkna radien (**r**) i cylindern. Ta formelsamlingen till hjälp.



Uppgift 6.

Eleverna höra en berättelse där läraren berättar, att hon hade en valp på gården där hon bodde, och där hade de även en brunn. En dag låg brunnslocket av och olyckligtvis trillar hundvalpen ner i brunnen. En stege behövs för att hämta upp valpen men hur lång måste den minsta vara för att den ska räcka. Läraren ritar en brunn med måtten 18 m^3 och bredd 1,4m, samt en hund i brunnen.

Uppgift 7 .

Beräkna följande potensekvationer

a) $x^2 + 9 = 45$ b) $A^2 + (-5)^2 = 125$ c) $b^2 - (-6)^2 = 28$ d) $112 = 16^2 - C^2$

Bilaga.C

Till föräldrar i klass …… Datum ……….

Den svenska skolan är i dag uppmärksammad på olika sätt. Inte minst har svenska elevers kunskaper och möjligheter att lära sig stått i fokus och diskuteras.

Vi är tre lärare från ……..gymnasiet (NN, Susanne Andersson Bustad, NN) som just nu går en utbildning vid högskolan i Skövde som syftar till att göra oss bättre skickade att utföra vårt arbete som lärare och att förbättra elevernas lärande i matematik. För att göra detta, behöver vi emellertid studera vår egen undervisning och elevernas lärande lite närmare. Ett sätt att göra detta är att göra videoinspelningar i klassrummet. För att få videofilma lektioner, måste vi emellertid ha föräldrars/målsmans tillstånd. De inspelade lektionerna kommer endast att användas i studiesyfte och kommer bara att ses av oss/mig samt våra handledare i kursen. Banden kommer att raderas efter att kursen är avslutad. Vi hoppas emellertid att ni vill ställa upp på denna undersökning som är viktig för att ge kunskap om hur vi kan förbättra undervisningen så att fler elever finner skolarbetet roligt och värdefullt- och lär sig mera.

Det är tänkt att vi ska påbörja vårt arbete v.3 och kameran kommer att ha stort fokus mot läraren eftersom det handlar om att vi som professionella lärare ska lära oss att skapa än bättre möjligheter för de lärande att lära. Susanne Andersson Bustad kommer att vilja intervjua och samtala med några elever ur klassen för att få deras perspektiv på vad det är som gör att de lär och inte lär. Detta samtal kommer att spelas in för att Susanne ska ha möjlighet att reflektera ytterligare över det sagda. Vi är oerhört tacksamma om ni kan lämna in besked senast tisdag 16/12-09.
Välkommen med frågor om det är något du undrar över!
Vänliga hälsningar NN, Susanne Andersson Bustad och NN. Tel. nr.
NN …… Susanne …… NN ……

Learning Study – En modell för utvecklingsarbete direkt i klassrummet.
Tillstånd ang. videofilmning i klassrummet under lektion i matematik, samt bandinspelningar i samtal med eleverna.

☐ Jag ger tillstånd till att mitt barn får filmas under en lektion och att den filmen får visas inom kursens ram i syfte att analysera lärarens undervisning. Läraren ansvarar för filmen.

☐ Jag ger inte tillstånd till att mitt barn filmas.

☐ Jag som elev pratar gärna om hur jag lär mig och har målsmans tillstånd.

☐ Jag som elev vill inte samtala om hur jag lär.

Elevens namn: ______________________________________ klass:____________

Målsmans underskrift:____