

Kontrastera mera!

- En learning study om hur lärare kan skapa förutsättningar för eleverna att lära sig bråk.

Läroutbildningen, ht 2009
Examensarbete 15 hp (Avancerad nivå)
Författare: Jenny Dahlgren
Anna Johansson
Malin Magnehed
Handledare: Ulla Runesson

Resumé

Arbetets art: Examensarbete i lärarutbildningen, Avancerad nivå, 15 hp Högskolan i Skövde

Titel: Kontrastera mera! – En learning study om hur lärare kan skapa förutsättningar för att eleverna ska lära sig bråk.

Sidantal: 40 sidor

Författare: Jenny Dahlgren, Anna Johansson och Malin Magnehed

Handledare: Ulla Runesson

Datum: Januari 2010

Nyckelord: Bråk, Variationsteori, Learning study, Kritiska aspekter

Vi har i en tidigare kurs genomfört en uppgift innehållande bråk, då vi upptäckte att elever hade svårt att lära sig framförallt sammansatta bråk. Vi blev intresserade av att ta reda på hur man skapar förutsättningar för att eleverna ska lära sig bråk, vilket är denna studies syfte. Studien syftar även till att upptäcka vilka aspekter som är kritiska för att lära sig bråk samt ta reda på hur dessa kan varieras i undervisningen vid elevernas lärande av bråk.

I studien används en learning study som kan ses som en typ av aktionsforskning där lärare forskar i sitt eget klassrum. Inom learning study används variationsteorin som är en guidande princip för att förstå och skapa förutsättningar för lärande. Lektionerna som genomfördes av oss, blivande lärare, vid tre olika tillfällen videofilmades. Dessa filmer transkriberades och analyserades därefter. Ur analysen av det transkriberade materialet, videoupptagningarna och observationsanteckningar från lektionerna samt för- och eftertest formulerades resultatet. I resultatet framkom att elevernas förutsättningar för att lära sig bråk ökade när läraren synliggjorde täljaren och nämnarens betydelse i kontrast till varandra samt genom att skapa ett tydligt mönster av variation och invarians av de kritiska aspekterna i undervisningen.

Abstract

Study: Degree project in teacher education, Advanced level, 15hp University of Skövde
Title: More contrasting! – A learning study about how teachers can create conditions for pupils to learn fractions
Number of pages: 40 pages
Authors: Jenny Dahlgren, Anna Johansson och Malin Magnehed
Tutor: Ulla Runesson
Date: January 2010

Keyword: Fractions, The theory of variation, Learning study, Critical features

In a previous course, we completed a task containing fractions, and discovered that pupils had difficulties learning particular composite fractions. We became interested in finding out how the teacher can create conditions for the pupils to learn and understand fractions. This is also the aim of this study. The study aims at identifying the critical aspects for learning fractions and how these can be varied in the teaching of fractions.

In this study we have used a learning study which can be seen as a type of action research where the teachers are researching in their own classrooms. Within learning study, the theory of variation is used as for understanding and creating conditions for learning. The lessons were conducted by us, prospective teachers, on three separate occasions, the lessons were video recorded. We transcribed these films and then analyzed them. From an analysis of the transcribed material, video recordings and observation notes from the lessons and pre- and post test we formulated the results. The results showed that conditions for learning fractions increased when the teacher made the role of the numerator and dominator visible by contrasting and by establishing a clear pattern of variation and invariance of the critical features.

Ansvarfördelning

Alla har varit aktiva i samtliga delar men var och en har haft huvudansvar för en viss del av studien. Största delen av tiden har arbetet genomförts tillsammans. Malin har haft huvudansvar för den teoretiska bakgrunden och tidigare forskning. Jenny har haft huvudansvar för metod och metoddiskussion och Anna har haft huvudansvar för resultatet. Diskussionen och övriga delar såsom resumé och inledning/bakgrund har vi arbetat med gemensamt.

Innehållsförteckning

1. Inledning/Bakgrund.....	1
1.2 Syfte	1
2. Teoretisk bakgrund och tidigare forskning	2
2.1 Hur skapas bra lärandemiljöer i skolan?	2
2.2 Learning study.....	4
2.2.1 Variationsteorin	4
2.3 Undervisningen av bråk förr och nu.....	6
2.3.1 Bråk i olika former	6
2.3.2 Elevers svårigheter och missuppfattningar om bråk	7
2.3.3 Undervisning av tal i bråkform	7
3. Metod	9
3.1 Metodval.....	9
3.1.1 Kvantitativ och kvalitativ metod	9
3.1.2 Aktionsforskning	9
3.1.3 Learning study som modell	10
3.2 Urval.....	11
3.3.1 Genomförande av för- och eftertest	12
3.3.2 Lektionsplanering.....	13
3.4 Analys.....	13
3.5 Trovärdighet.....	15
3.6 Forskningsetik	15
4. Resultat.....	17
4.1 Övergripande likheter och skillnader i lektionsuppläggen.....	17
4.2 Lektion 1	18
4.2.1 Eleverna i A-gruppens förkunskaper inför lektion 1	19
4.2.2 Kritiska aspekter.....	20
4.2.3 Upplägg av lektion 1	20
4.2.4 Elevernas kunskaper i A-gruppen efter lektion 1	22
4.3 Planering av upplägg inför lektion 2	24
4.3.1 Elevernas förkunskaper i B-gruppen inför lektion 2.....	24
4.3.2 Kritiska aspekter.....	25
4.3.3 Upplägg av lektion 2	25
4.3.4 Elevernas kunskaper i B-gruppen efter lektion 2	27
4.4 Förändringar av upplägg inför lektion 3	29
4.4.1 Elevernas förkunskaper i C-gruppen inför lektion 3	29
4.4.2 Kritiska aspekter.....	29
4.4.3 Upplägg av lektion 3	30
4.4.4 Eleverna i C-gruppens kunskaper efter lektion 3	31
4.5 Slutsats	32
5. Diskussion	34
5.1 Metoddiskussion.....	34
5.1.1 Lektionernas upplägg och dess genomförande	35
5.2 Resultatdiskussion	36
5.2.1 För- och eftertestets utformning	36
5.2.2 Oförändrat eller försämrat resultat	37
5.2.3 Förbättrat resultat	39
5.3 Studiens slutsats	39

5.4 Fortsatt forskning	39
------------------------------	----

Bilaga 1: För- och eftertest

Bilaga 2: Tillstånd av vårdnadshavare

Bilaga 3: Procenttabell

1. Inledning/Bakgrund

På olika platser runt om i världen samlar vi eleverna i klassrum på deras skolor, där de förväntas lära i samma hastighet och uppnå lika lärande genom att närvara på samma lektioner. Lärarens centrala uppdrag torde vara att först finna på vilka olika sätt eleverna förstår och för det andra fundera över hur undervisningen borde struktureras för att eleverna ska få möjlighet att upptäcka vad undervisningen handlar om på det sätt som är avsett. Det är centralt på vilket sätt lärare lägger upp sina lektioner så att elever på ett specifikt sätt urskiljer vad det är som ska läras. Svårigheten ligger i hur vi kan göra ett speciellt innehåll tillgängligt för eleverna (Lo & Pong, 2005).

Vi har tidigare under lärarutbildningen utfört en uppgift med bråk i kursen matematik för tidiga åldrar under vårterminen 2009. I uppgiften var det första gången vi upptäckte att eleverna visade svårigheter med sammansatta bråk och detta ledde till att vi började reflektera över hur vi på ett tillfredsställande sätt skulle kunna möjliggöra lärande av sammansatta bråk för den elevgrupp vi hade framför oss. Bråk har på senare tid uppmärksamats på grund av de nya kursplanemålen (Skolverket, 2009) med mål som eleverna lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i matematik. Ett av dessa mål är att eleverna ska kunna dela upp helheter i olika antal delar samt kunna jämföra, beskriva och namnge delarna som enklare bråk. I slutet av det femte skolåret ska eleverna ha en grundläggande taluppfattning om tal i bråkform. Mål att uppnå i slutet av det nionde skolåret är att eleven ska ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråkform. Det är viktigt att eleverna redan från början får en förståelse och kunskap kring bråk och dess kritiska aspekter eftersom det är en central inkörsport till algebran (Kilborn, 1999). Studien är relevant då denna forskning bidrar till att lärare själva när de utför en studie som denna är aktiva i processen. Dessutom möjliggörs lärande av bråk för fler elever än vad som skulle vara möjligt om inte studien hade utförts.

1.2 Syfte

Syftet med studien är att genom en learning study ta reda på hur man skapar förutsättningar för att eleverna ska lära sig bråk. Syftet är även att upptäcka vilka aspekter som är kritiska för att lära sig bråk samt ta reda på hur dessa kan varieras i undervisningen vid elevernas lärande av bråk.

2. Teoretisk bakgrund och tidigare forskning

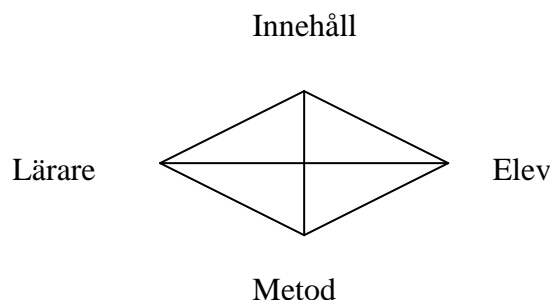
I den här delen beskrivs teorier om hur bra lärandemiljöer skapas, vad en learning study är samt teorier om bråk.

2.1 Hur skapas bra lärandemiljöer i skolan?

Under de senaste åren har det skett en förändring inom sättet att undervisa. Förr hade läraren de rätta svaren som eleverna fick serverade men numera utgår läraren i större utsträckning från elevernas frågor och kunskaper i undervisningen. Läraren intresserar sig även nu för tiden för relationen mellan ämnesinnehållet och elevens sätt att förstå detta innehåll (Claesson, 2009). Förr lade lärarna även stor vikt på metodiken istället för didaktiken. Metodik är sådant som har systematiserats utifrån det självlärda medan didaktik har en vetenskaplig grund, didaktik är vetenskapen om metodik. Didaktik kan också beskrivas som kunskap om undervisning (Bengtsson & Kroksmark, 1994 i Claesson).

Inom didaktiken använder sig lärare av tre huvudfrågor: vad, hur och varför. Vad-frågan handlar om innehållet i undervisningen och eftersom det inte är möjligt att undervisa om allt måste läraren göra ett urval av innehållet. Många gånger är elever och kollegor delaktiga i urvalet av innehållet i undervisningen (Claesson, 2009). Det är lärarens ansvar att skapa lärandetillfällen som leder mot särskilda mål. Innehållet bör skapa ett intresse hos eleverna som stimulerar och engagerar dem i att söka mer kunskap samt att dra slutsatser på egen hand. Eleverna måste kunna relatera innehållet till tidigare konkreta och abstrakta upplevelser och erfarenheter. Lärarens förhållningssätt till innehållet påverkar hur lärandeutfallet blir då elevernas möte med innehållet är det centrala i undervisningen (Claesson, 2009; Sträng & Dimenäs, 2000). Läroboken kan styra innehållet i undervisningen men då måste läraren ifrågasätta om läroboksinnehållet är relevant vid den tidpunkten och för de eleverna. Hur-frågan handlar om vilken metod som ska väljas. På vilket sätt ska eleverna arbeta med innehållet? Ska innehållet föreläsas av läraren, ska eleverna diskutera innehållet eller ska innehållet dramatiseras? Läraren måste välja en lämplig metod utifrån ämnet, den aktuella elevgruppen samt utifrån varje enskild elev. Det går inte att enbart använda ett tidigare lektionsupplägg rakt av utan läraren måste fundera över ifall det som var lyckat med den förra elevgruppen lämpar sig i den aktuella situationen och med den nya elevgruppen. Varför-frågan har att göra med vilka mål som läraren avser att uppnå med innehållet och den valda metoden. Politikens inflytande över skolan samt historiska faktorer som påverkar nuet ingår även under varför-frågan (Claesson, 2009).

Det finns en modell i form av en romb som läraren kan använda sig av för att analysera och problematisera sin undervisning, se figur 1:



Figur 1. Den didaktiska romben (Sträng & Dimenäs, 2000 sid. 190)

Komponenternas förhållanden i romben är en hjälp för att synliggöra praktiska problem och för att möjliggöra lösningar i undervisningen som leder mot ett lärande hos eleverna. Alla dessa komponenter påverkar hur lärandeutfallet blir hos eleverna. Därför är det av stor vikt att alla pedagoger medvetet reflekterar över denna teori i verksamheten (Sträng & Dimenäs, 2000). Det är viktigt att eleverna ser helheten och sammanhanget i undervisningen samtidigt som eleverna får kunskap om de olika delarna i innehållet. Eleverna kan även förstå helheten genom delarna samt delarna genom helheten, därför är det viktigt att det finns en växelverkan mellan delarna och helheten. Om inte läraren synliggör helheten och sammanhanget skapar eleverna ett eget sammanhang utifrån innehållet som kan vara felaktigt (Claesson, 2009). I undervisningssammanhang talar man ofta om yt- och djupinläring. De elever som har kunnat urskilja en helhet samt förstått ett sammanhang utifrån innehållet tillägnar sig en djupare kunskap. De elever som memorerar innehållet mer eller mindre utantill utan att reflektera över innehållet tillägnar sig endast en ytligare kunskap (Claesson, 2009; Maltén, 1997). För att eleverna ska ha möjlighet att sätta innehållet i ett sammanhang krävs det att innehållet inte ligger för långt bort från elevernas förförståelse. Den erfarenhet som eleverna har med sig in i varje given situation kallas för förförståelse. Eleverna skapar sin helhet mot bakgrund av sin förförståelse. En stor del av elevernas lärande sker utanför den organiserade undervisningen, därför måste läraren ta reda på elevernas förförståelse innan ett visst innehåll ska behandlas. För att kunna förbättra elevens lärande måste läraren förstå hur eleven förstår. Frågor som ”hur tänker du då” är bra att använda sig av för att förstå elevens sätt att uppfatta ett innehåll (Claesson, 2009; Sträng & Dimenäs, 2000).

Innehållet i undervisningen bör vara åskådligt för eleverna det vill säga att det går att se, lyssna på, ta på eller liknande. Läraren måste fundera på vad som ska åskådliggöras samt på vilket sätt innehållet ska åskådliggöras. Åskådligheten i undervisningen är därmed kopplad till de båda didaktiska frågorna vad och hur. Olika typer av åskådningsmaterial underlättar för elevernas lärande. En skicklig lärare kan även åstadkomma inre åskådlighet för eleverna med hjälp av inlevelse när man läser eller berättar något för eleverna. Om läraren lyckas fånga elevernas koncentration kan de föreställa sig och skapa inre bilder om det undervisningen handlar om. Det är också av stor vikt att eleverna får uppleva innehållet i undervisningen med alla sina sinnen såsom syn, hörsel, lukt, smak och känsel. Att eleverna på egen hand med stöd från läraren får söka och pröva sina kunskaper är bra för inläringen. Det är viktigt att läraren skapar situationer där det finns utrymme för eleverna att göra misstag och först efter att eleverna har kämpat med innehållet kan de uppleva sin framgång. Praktiska inslag i

undervisningen främjar elevernas lärande, tanke och handling är varandras förutsättningar. Eleven är tvungen att vara aktiv i lärandesituationen för att ett lärande ska ske. Det praktiska arbetet är ämnat att skapa en förståelse och nyfikenhet och gör att eleverna minns innehållet i undervisningen bättre (Claesson, 2009).

Dialogen i undervisningen är otroligt viktig, eleverna lär sig i samtal med varandra och med läraren. Tidigare har nämnts att läraren kan använda sig av olika frågor i undervisningen. Sättet som läraren ställer frågorna på leder till att förlösa kunskap. Ett samtal kan för eleven synliggöra elevens kunskap som denne inte var medveten om att han eller hon hade innan samtalet. Läraren bör skapa ett klimat där alla elever vågar uttrycka sin mening samt där olika åsikter synliggörs och tas på allvar (Claesson, 2009; Sträng-Haraldsson, 1995) Att eleverna får arbeta i grupp skapar möjligheter för meningsutbyten mellan eleverna som i sin tur gynnar lärandet. Gruppen blir frimodigare ju mindre den är och den ideala gruppstorleken ur socioemotionell synpunkt är troligen 3-4 personer (Maltén, 1997; Sträng & Dimenäs, 2000). I möten med andra människor kan eleverna nå sin proximala utvecklingszon, det vill säga den närmaste zonen som eleverna har möjlighet att nå vid kunskapsutbyten med andra elever eller lärare (Claesson, 2009).

2.2 Learning study

I Japan används en modell som kallas för lesson study av ett flertal lärare. I en lesson study träffas grupper med lärare regelbundet under en lång period för att arbeta på och för att förbättra en lektionsdesign. När lektionsdesignen är färdig genomförs lektionen av en lärare i gruppen, medan de andra observerar. Därefter följer en diskussion kring lektionen och vad som kan behöva ändras på. Sedan är det nästa lärares tur att genomföra den reviderade lektionen med sina elever. Fokus ligger på undervisningsmetoden och inte på den enskilde läraren (Stigler & Hiebert, 1999). Det är från Japans lesson study som den svenska modellen för learning study har sitt ursprung (Gustavsson & Wernberg, 2006). Syftet med en learning study är att arbetslaget ska inleda ett samarbete kring ett specifikt ämne. I en learning study använder sig lärarna av en ifrågasättande metod till sin undervisning enligt ett systematiskt tillvägagångssätt. De utvärderar sättet att undervisa i förhållande till vad eleverna har lärt sig, fokus ligger på lärandet och inlärningsproblemen. Lärarna forskar i sitt eget klassrum och huvudfrågan är vad det är som måste tillföras i undervisningen för att eleverna ska få syn på det som läraren avser att de ska lära sig. Genom att arbeta med en learning study sker en parallell process där lärarna utvecklar metoder för att möjliggöra ett lärande hos eleverna, samtidigt visar studier att elevernas kunskaper förbättras betydligt. Learning study är en systematisk planeringsprocess med reflektion och revision där delar följs upp och utvärderas (Runesson, 2008). Learning studyns upplägg kan läsas mer om i metoddelen.

2.2.1 Variationsteorin

När människan lär sig något nytt innebär det att han eller hon ser saker på nya sätt. När människan upptäcker något nytt förändras även hans eller hennes sätt att uppfatta ett visst fenomen (Marton & Booth, 2000). För att elever ska upptäcka nya saker i undervisningen krävs att läraren varierar innehållet på olika sätt, som vi skrev i stycket ovan: Vad är det som måste tillföras i undervisningen för att eleverna ska få syn på det

som läraren avser att de ska lära sig? Vad är det som måste varieras? Inom modellen learning study använder man sig av *variationsteorin* som teoretisk utgångspunkt. Den innebär just att läraren varierar delar av innehållet samtidigt som några delar hålls konstant för att eleverna ska upptäcka nya saker av det de ska lära sig (Holmqvist, 2006; Lamon, 2006; Runesson, 2008).

Den eller de förmågor som läraren avser att eleverna ska utveckla kallas inom variationsteorin för *lärandeobjekt*. Det kan vara ett fenomen eller en egenskap som lärarna vill undersöka *hur* eleverna lär sig samt *vad* de lär sig kring detta. Lärarnas och elevernas svårigheter med ett specifikt fenomen kan också ligga till grund för vilket lärandeobjekt som framhålls i en learning study. Olika personer kan uppfatta olika saker på flera sätt. Personens tidigare erfarenheter och upplevelser påverkar hur denne ser på det aktuella objektet. Samma sak gäller i skolan då läraren undervisar eleverna utifrån lärandeobjektet. Nedan beskrivs hur olika personer kan uppfatta ett träd:

En del personer urskiljer kanske i första hand trädets färger, andra trädets skick och ytterligare en studerar trädets skugga. När vi börjar samtala om trädet upptäcker vi att vi har sett olika aspekter av det, och genom dessa samtal lär vi oss att se nya aspekter än de vi först urskilde. Lärande innebär, utifrån vårt sätt att se det, att erfara omvärlden på ett nytt sätt (Holmqvist, 2006 s. 15).

Lärarens uppdrag är att göra lärandeobjektet synligt från olika perspektiv. För att läraren ska kunna göra lärandeobjektet synligt från olika perspektiv krävs det att läraren själv är medveten om vilket perspektiv eleven har intagit. Det blir svårt att hjälpa eleven om läraren utgår ifrån att eleven ser lärandeobjektet från samma perspektiv som sitt eget. Holmqvist har sett i sina studier att läraren många gånger tror att läraren och eleven delar samma perspektiv, men så är inte alltid fallet. Att synliggöra de delar som eleverna inte fått syn på genom variationsteorin påverkar hur lärandeutfallet blir (Holmqvist, 2006; Runesson, 2008). De delar som eleverna måste skönja för att lära sig något nytt kallas inom variationsteorin för *kritiska aspekter*. Det krävs variation av de kritiska aspekterna för att ett lärande ska ske hos eleverna (Holmqvist, 2006; Runesson, 2008). Eleverna måste kunna *urskilja* de kritiska aspekterna för att få syn på och förstå lärandeobjektet. Dessa kritiska aspekter måste upplevas *samtidigt* för att eleverna ska kunna se helheten av lärandeobjektet. Det är läraren som måste skapa möjligheter för eleverna att urskilja aspekterna. Den kritiska aspekt som ska urskiljas varieras medan de övriga hålls konstant. Begreppet ”urskilja” är viktigt i variationsteorin då urskiljning är avgörande för huruvida eleverna lär sig något eller inte (Marton & Booth, 2000).

Vi vill sätta in variationsteorins begrepp i ett sammanhang för att underlätta förståelsen av denna teori. Om vi föreställer oss att en häst är *lärandeobjektet* så är svansen, manen och hovarna exempel på *kritiska aspekter* för att förstå vad en häst är. Den personen som ska lära sig vad en häst är måste kunna *urskilja* hästens olika kännetecken alltså de kritiska aspekterna. Dessa kännetecken blir för sig inte förståeliga för vad som utmärker en häst utan de måste ses *samtidigt* för att skapa denna förståelse. Nu har personen lärt sig att just detta djur som den har framför sig är en häst men det betyder inte att personen vet att nästa djur den möter är en häst om den inte ser exakt likadan ut. För att förstå att det också är en häst måste personen möta *variation* av de kritiska aspekterna (svansen, manen och hovarna). Om en människa ska lära sig vad en häst är måste personen möta hästar med olika svansar, manar och hovar. För att förstå vad en häst är måste personen också veta vad en häst inte är. Genom att lärandeobjektet ses i kontrast till andra objekt till exempel en ko, förstår personen att någonting som liknar en häst men har klövar och en annorlunda svans med mera kallas för ko. På så sätt får personen

en djupare förståelse av lärandeobjektet. Om lärandeobjektet skulle vara färgen blå måste den lärande först uppleva olika blåfärgade föremål till exempel en blå bil, en blå penna, och en blå väska och så vidare. För att personen sedan ska kunna urskilja färgen blå måste personen även möta likadana föremål fast där färgen varierar till exempel fyra bilar; en röd, en blå, en grön och en gul. Då är föremålet invariant medan färgen varierar. Det som läraren vill synliggöra för eleverna ska därmed varieras. Viktiga begrepp inom variationsteorin är således lärandeobjekt, kritiska aspekter, urskiljning, samtidighet och variation (Holmqvist, 2006).

2.3 Undervisningen av bråk förr och nu

Numera i Sverige används inte tal i bråkform i samma utsträckning i vardagslivet som det gjordes förr i tiden. Decimalsystemet har ersatt mycket av bråkräkningens roll och därmed minskat kravet på vardagskunskaper i bråkräkning. Att elever har en grundläggande förståelse för bråkformen och bråkräkning är viktigt för att de ska förstå tal i decimalform, procentform samt när de ska lära sig algebra. Många elever har erfarenheter av bråk i vardagen genom att de har delat olika saker såsom pizzor, kakor, godis eller leksaker. De flesta elever är bekanta med en halv och en fjärdedel men en tredjedel är det inte många elever som känner till. Bråkbegreppet kan mycket väl introduceras redan i de lägsta klasserna då barn tidigt utför uppdelningar och använder uttryck som hälften och halv. Traditionellt sett har undervisning i bråk inte gett eleverna tillräckligt med tid och möjligheter att utveckla förståelse för vad bråk är i förhållande till hur mycket tid som har lagts på att lära ut regler för de fyra räknesätten (Kilborn, 1999; Malmer, 2002; McIntosh, 2009).

2.3.1 Bråk i olika former

Användningen av bråk förekommer i flera olika sammanhang och har då olika innehåll. I detta stycke kommer några olika former av bråk att beskrivas. Bråk kan ses som ett tal, bråk som en del av en hel, bråk som en del av ett antal samt bråk som används för att uttrycka en relation. Den första formen som innebär att bråk kan ses som ett tal menas att bråktalet har en plats på tallinjen precis som heltalen. Bråktal kan se helt olika ut men ändå beteckna samma tal eller andel av något till exempel $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ och $\frac{3}{6}$, dessa tal är lika stora som 0,5 och om täljaren och nämnaren divideras blir svaret 0,5 och så vidare. Tal som betecknar lika stora andelar kallas för utbytbara bråktal men detta kommer vi inte att gå in mer på då det inte är relevant för vår studie. Den andra formen som anger en del av en helhet är de flesta barn bekanta med från vardagslivet. Det är en hel som delas upp i ett antal lika stora delar, antalet delar påverkar vilken siffra nämnaren får. Bråk som anger en del av ett antal innebär att eleven ser ett antal föremål som en helhet som delas upp i mindre lika stora grupper, siffran som nämnaren får bestäms av antalet grupper/delar. Den fjärde formen av bråk som används för att uttrycka en relation används ofta för att uttrycka proportioner, andelar eller frekvens, ett exempel är vid saftblandning då det kan stå på flaskan att $\frac{1}{9}$ av glaset ska bestå av saft och resten vatten (Kilborn, 1999; Malmer, 2002; McIntosh, 2009).

När vi delar en helhet eller en samling föremål i ett antal lika stora delar kan varje sådan del uttryckas med ett stambråk såsom en halv, en tredjedel, en fjärdedel, en femtedel och så vidare av en hel. Detta är själva grunden för att förstå bråkformen. Eleverna måste förstå att nämnaren används för att ge namn åt andelen till exempel ”femtedel”

och täljaren talar om hur många andelar det ska vara (McIntosh, 2009). I ett stambråk är täljaren alltid ett, exempelvis $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$, det finns även något som kallas för sammansatta bråk, i ett sammansatt bråk är talet i täljaren alltid större än ett, exempelvis $\frac{2}{4}$ och $\frac{3}{6}$ (Runesson¹).

2.3.2 Elevers svårigheter och missuppfattningar om bråk

Som vi skrev ovan har många elever kommit i kontakt med tal i bråkform i olika vardagssituationer. I vardagen kan dessa uttryck användas slarvigt, när vi säger ”dela upp den i fjärdedelar” eller i receptet står det en halvliter menar vi sällan exakt lika stora delar eller exakta mått. Detta kan förvirra eleverna eftersom det måste vara exakt lika stora delar för att det ska få kallas bråkdelar. Bråktal som elever kan få genom upprepade halvering såsom en halv, fjärdedelar och åttondelar brukar vara lättast att förstå. När lärare sedan introducerar en tredjedel och en femtedel vill många elever använda samma tillvägagångssätt och delar den hela och sedan delar de den ena halvan igen för att få en tredjedel, vilket är ett missförstånd. Det är därför viktigt att lägga mycket tid på hur introduktionen av tredjedelar och femtedelar ska göras. Lärarens sätt att uttrycka bråk muntligt kan skapa osäkerhet hos eleverna då de har mött begreppet ”tredje” som ett ordningstal (första, andra, tredje och så vidare) och det kan komma i konflikt med hur begreppet ”tredjedel” ska tolkas (McIntosh, 2009). Många elever överför sina tidigare kunskaper från heltal till bråkformen och tror att samma regler kan användas, därför sker det ofta två missuppfattningar om storleken hos tal i bråkform. Den ena missuppfattningen är att en stor nämnare betyder att det är ett större tal till exempel att $\frac{1}{7}$ är större än $\frac{1}{3}$. Den andra missuppfattningen är att 9 i nämnaren betyder att talet nästan är en hel. Genom att eleverna får tid på sig att utveckla en god taluppfattning om begreppet bråk och inte bara utföra beräkningar med bråkuttryck där beteckningarnas innebörd är oklar undviks dessa missuppfattningar (Kilborn, 1999; Malmer, 2002; McIntosh, 2009). Eftersom tal som är skrivet i bråkform skrivs som två tal på varsin rad har eleverna svårt att förstå att bråktalet är ett tal. Bråk anses som något svårt för eleverna att lära sig men svårigheterna ligger oftast inte i innebörden av stambråken utan hur bråktalen betecknas. Att bråktalet måste ses tillsammans med helheten är också något som många elever missuppfattar eller inte förstår (Lamon, 2006; Malmer, 2002; McIntosh, 2009). ”Har vi sex kakor är varje kaka $\frac{1}{6}$ av helheten, men om vi har tre kakor är varje kaka $\frac{1}{3}$ av helheten” (McIntosh, 2009, s.31) Många missuppfattningar grundas i att lärare arbetar med bråkuttryck isolerat från verkligheten, istället för att arbeta konkret och diskutera tillsammans med eleverna (McIntosh, 2009). Hur ska då lärare undervisa om bråk?

2.3.3 Undervisning av tal i bråkform

När lärare introducerar bråk är det viktigt att arbeta med konkret material och att eleverna får arbeta med många olika utseenden på helheten i flera sammanhang (McIntosh, 2009; Lamon, 2006). Det är också av stor vikt att utgå från många vardagsnära exempel som uttrycks med hjälp av bråkform. Nya begrepp bör introduceras laborativt där läraren och eleverna samtalar om vad som händer. Genom att arbeta praktiskt med begreppen skapar eleverna inre bilder och så småningom undersöks hur bråk kan skrivas med symboler. Läraren måste tydliggöra sambanden mellan aktiviteterna, orden och symbolerna (Kilborn, 1999; Malmer, 2002; McIntosh,

¹ Runesson, U. (2009-09-01) *Variationsteorin*. Föreläsning: Högskolan i Skövde.

2009). Om läraren endast utgår från den traditionella tårtan vid introduktionen finns risken att eleverna låser sig vid just den formen (Lamon, 2006; Malmer, 2002). Inledningsvis bör läraren upprepa och betona orden ”dela lika” vid arbetet med bråk. Läraren bör skapa situationer där det blir naturligt att diskutera sambanden hälften av en halv, hälften av hälften igen och fjärdedelar. Eleverna har tidigare arbetat med att dubbla och halvera, detta kan användas i undervisningen av bråk till exempel: det är tolv ägg i kartongen, hur många är hälften av 12? Hur många är en fjärdedel av 12 och så vidare (McIntosh, 2009)?

Det finns några grundläggande aspekter av bråk som eleverna behöver förstå. Den första aspekten är att alla delar måste vara lika stora för att de ska kallas bråkdelar. Läraren kan visa med konkreta exempel att delarna inte behöver ha samma form och utseende utan att det beror på helheten hur delen ser ut. Den andra aspekten är täljaren och nämnarens betydelse, nämnaren visar hur många delar den hela har delats i och täljaren visar hur många delar vi ska ha. Den tredje aspekten är att eleverna måste förstå bråktalens storlek, ju större nämnaren är när täljaren är den samma desto mindre är bråket eftersom varje del blir mindre. Att sätta ut talen på en tallinje kan synliggöra talens storlek. Den fjärde aspekten av bråk som är viktig att eleverna förstår är att $2/2 = 3/3 = 4/4 = 5/5 = 1$ (McIntosh, 2009).

3. Metod

I detta kapitel redovisas de olika metoder vi valt att arbeta efter. Studiens urval, genomförande, analys, trovärdighet och forskningsetik kommer även att belysas.

3.1 Metodval

Här följer en beskrivning av våra metodval.

3.1.1 Kvantitativ och kvalitativ metod

Kvantitativ och kvalitativ metod är beteckningar på vilket sätt forskaren valt att bearbeta och analysera den data som denne har samlat på sig. När en kvantitativ metod används bearbetas informationen med hjälp av statistiska bearbetnings- och analysmetoder såsom stolpdigram eller histogram. Om en kvalitativ metod används bearbetas informationen med hjälp av verbala analysmetoder. En kvantitativ metod är att föredra när forskaren vill ta reda på när, hur ofta, hur många eller hur vanligt något är. Kvalitativt inriktad forskning är där datainsamlingen fokuserar på ”mjuka” data, till exempel i form av tolkade analyser och kvalitativa intervjuer. Kvalitativ forskning försöker klargöra karaktären eller egenskaperna hos ett fenomen medan kvantitativ forskning söker mängden av denna egenskap eller karaktär (Patel & Davidsson, 2003; Starrin & Svensson, 1998; Trost, 2002). I praktiken använder man sig mer eller mindre av dessa två metoder. Även om man arbetar med en kvantitativ metod finns det ofta inslag av verbala analyser och vice versa (Patel & Davidson, 2003). Det som är avgörande för vad man väljer för metod är vilken kunskap man söker. Vi har valt att använda oss av en kvalitativ och kvantitativ metod då syftet med studien är att ta reda på hur man skapar förutsättningar för att eleverna ska lära sig bråk. Studien syftar även till att upptäcka vilka aspekter som är kritiska för att lära sig bråk samt att ta reda på hur dessa kan varieras i undervisningen vid elevernas lärande av bråk.

3.1.2 Aktionsforskning

Aktionsforskning tillhör den kvalitativa forskningstraditionen. En learning study kan ses som en typ av aktionsforskning. Inom aktionsforskning är det praktikern själv som ställer frågorna utifrån sådant som praktikern finner i vardagen och i det kända (Bell, 2006). För det mesta är det något som han eller hon vill förbättra eller förändra i den aktuella verksamheten. Forskaren medverkar i både planeringen och genomförandet i forskningen. Det sker ett utbyte mellan forskaren och praktikern där deras olika kompetenser kan tillvaratas. Forskarens teoretiska kunskap och praktikerns erfarenhetsbaserade kunskap kompletterar varandra väl. Det som skiljer mellan aktionsforskning och strikt akademisk forskning är att forskningen startar utifrån praktikerns frågor i verksamheten. En modell i form av en cirkel eller en spiral där momenten planera – agera – observera – reflektera ingår, används ofta inom aktionsforskning. Många gånger är det en handling som ska iscensättas och prövas samtidigt som den filmas och observeras. Denna handling blir sedan föremål för

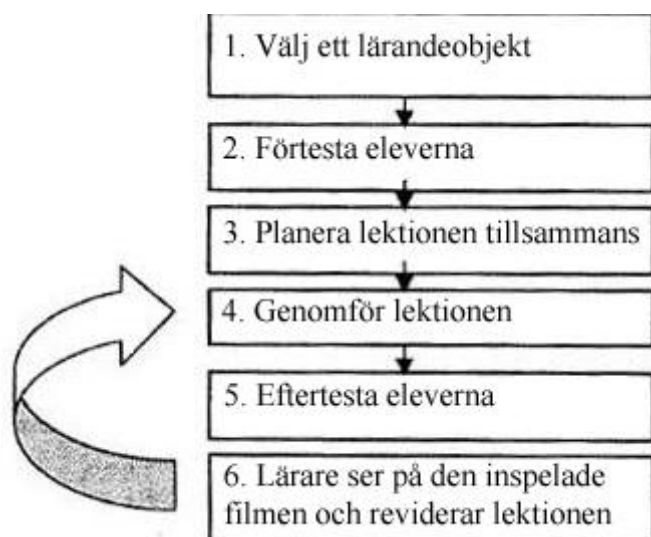
diskussion och reflektion. Processen kan beskrivas som ett led i att gå från det kända, pröva det okända och därefter relatera den nya kunskapen till de egna erfarenheterna. Kurt Lewins arbetade som socialpsykolog i USA under 1940 talet. Han försökte förstå människors handlingar. Den forskning som var inriktad mot social handling kallade han för aktionsforskning. Han använde sig av en cyklisk modell som beskrivs nedan:

Lewins arbete brukar återges som en cyklisk modell där arbetet utgår från att man a) utifrån egna erfarenheter planerar en aktion, b) aktionen genomförs, c) aktionen följs genom att observera vad som händer och d) resultatet blir föremål för reflektion som leder vidare till ny planering. Därigenom kan man säga att genom aktionsforskning föds nya frågor som leder till en ny aktion (Rönnerman, 2004 s. 26).

En viktig del i aktionsforskning är att analysera data som har samlats in i form av videofilm, nedskrivna observationer och intervjuer. Forskaren försöker förstå materialet genom att hitta olika mönster, det kan till exempel vara elever som har svarat på ett liknande sätt medan andra har svarat på ett annat sätt. Analysen av materialet och de egna erfarenheterna bidrar till ny kunskap om den aktuella verksamheten. Alla praktiker ser olika ut därför kan inte forskningens resultat överföras på någon annan praktik men den kan användas för att se skillnader och likheter mellan olika praktiker och verksamheter (Rönnerman, 2004). I nästa stycke beskrivs hur en learning study är upplagd.

3.1.3 Learning study som modell

Första steget i en learning study är att arbetslaget gemensamt bestämmer ett lärandeobjekt som ska behandlas. Därefter genomförs ett förtest med eleverna där läraren får syn på elevernas förkunskaper och svårigheter med lärandeobjektet. Utifrån förtestens resultat kan lärarna urskilja vissa kritiska aspekter utifrån elevernas svar som eleverna måste få klarhet i för att förstå och få en djupare kunskap om lärandeobjektet. Med kritiska aspekter menas att eleven måste kunna urskilja vissa kritiska drag för att lära sig vad något är och för att förstå vad det inte är. Med utgångspunkt i detta planerar lärarlaget gemensamt den första lektionen. Första lektionen genomförs av en lärare i arbetslaget i dennes klass medan övriga i arbetslaget observerar samt videofilmar lektionen. Efter första lektionen genomförs ett eftertest av eleverna för att arbetslaget ska få syn på om eleverna lärt sig det som var avsett. En ny lektion planeras sedan utifrån vad som framkommit i eftertesten, videofilmen samt observationen. Detta fortlöper tills samtliga lärare i arbetslaget genomfört lektionen i respektive klass. Lärandeobjektet är i fokus och hålls konstant genom samtliga lektioner. En learning study består av olika cykler (Holmqvist, 2006). Se figur 2 nedan:



Figur 2. Modell av en Learning Study cykel (Efter Runesson, 2008, s. 158).

Det viktigaste steget i en learning study är att finna lärandeobjektet och de kritiska aspekterna som är associerade med lärandeobjektet. Förtestet och eftertestet är av stor betydelse för att verifiera lärarens tankar då lärarna redan innan förtestet kan ha idéer för vad eleverna behöver utveckla för att förstå lärandeobjektet. Resultatet av förtestet bidrar till planeringen av lektionen. Elevernas framsteg mäts i eftertestet för att se om de har lärt sig det som var meningen. Detta fungerade även som en slags utvärdering av lektionen (Kwok & Chik, 2005).

3.2 Urval

På en mindre skola i Västra Götalands län där vår verksamhetsförlagda utbildning (VFU) utfördes samlades även vårt empiriska material till den här studien in. Eleventalet var till en början 59 stycken men efter ett naturligt bortfall såsom sjukdom och semester genomförde sammanlagt 53 stycken elever förtest, lektion samt eftertest. De sex elever som inte medverkade vid samtliga moment utgör studiens bortfallsgrupp. Eleverna var uppdelade i ålders- och kunskapsheterogena tvärgrupper ur år 4, år 5 och år 6. Uppdelningen utfördes av klasslärarna i de ovan nämnda klasserna för att få så jämn delning av kunskapsnivå som möjligt.

3.3 Genomförande

Vi har tidigare utfört en uppgift om bråk i kursen matematik för tidiga åldrar under vårterminen 2009. När uppgiften genomfördes upptäcktes att eleverna visade svårigheter med sammansatta bråk och detta ledde till att vi började reflektera över hur vi på ett tillfredsställande sätt skulle kunna möjliggöra lärande av bråk för den elevgrupp som var framför oss. Studien genomfördes på vår VFU-skola i år 4, år 5 och år 6. I samråd med handledarna skapades tvärgrupper i de olika klasserna. Eftersom vi inte kände eleverna bad vi våra handledare om hjälp att dela in klasserna i ålder- och kunskapsheterogena grupper för att kunna jämföra de olika gruppernas resultat. Grupperna kallades för A-, B-, och C-gruppen. A-gruppen medverkade vid lektion 1, B-gruppen vid lektion 2 och C-gruppen vid lektion 3. Planeringen startades vid ett tidigt

skede och det bestämdes då när de olika momenten i learning studyn skulle genomföras, såsom förtest, lektioner samt eftertest. Även handledning planerades in kontinuerligt. Beslut om var momenten skulle utföras bestämdes även vid detta tillfälle. Vi drog lott om vem som skulle genomföra respektive lektion. Här nedan beskrivs kortfattat vårt tillvägagångssätt av learning studyn. Delarna kring genomförandet av för- och eftertest samt planering av lektioner beskrivs därefter mer ingående under enskilda rubriker.

1. Ett förtest genomfördes med den första gruppen (A-gruppen) för att få syn på de kritiska aspekter som eleverna tidigare inte haft möjlighet att upptäcka kring bråk.
2. En lättare analys genomfördes av de första förtesten för att kunna planera den första lektionen. I samband med den här analysen delade vi in eleverna i fem grupper med tre till fyra elever i varje grupp inför en gruppuppgift som skulle genomföras på lektionen.
3. Förtest med B-gruppen inför lektion 2 genomfördes på samma sätt som de första förtestet.
4. Analys av förtest 2 genomfördes. I samband med den här analysen delade vi även in dessa elever i fem grupper med tre till fyra elever i varje grupp inför gruppuppgiften
5. Lektion 1 genomfördes med A-gruppen av lärare 1 medan lärare 2 observerade och lärare 3 filmade. Lektion 1 varade i 49 minuter och 15 sekunder.
6. Eftertest genomfördes dagen efter lektion 1 av eleverna i A-gruppen. Samma test användes som vid förtestet för att tydligt se eventuella skillnader i svaren.
7. Utvärdering av lektion 1 genomfördes genom att lärare 1, 2 och 3 gemensamt såg på lektionen. Vissa sekvenser av filmen som vi ansåg var extra intressanta att lyfta tillsammans med våra tre handledare valdes ut.
8. Lektion 2 planerades utifrån resultat av analys av videoupptagning och av resultat av eftertest 1 men även av förtest 2.
9. Lektion 2 genomfördes av lärare 2 medan lärare 3 observerade och en ersättare för lärare 1 filmade. Lektion 2 varade i 45 minuter och 35 sekunder.
10. Lektion 2 analyserades på samma sätt som lektion 1.
11. Förtest med C-gruppen inför lektion 3 genomfördes.
12. Analys av förtest 3 genomfördes. I samband med den här analysen delade vi in eleverna i fem grupper med tre till fyra elever i varje grupp.
13. Lektion 3 genomfördes av lärare 3 medan lärare 1 observerade och lärare 2 filmade. Lektionen varade i 52 minuter och 22 sekunder.
14. Analys av lektion 3 genomfördes på samma sätt som de tidigare lektionerna.

3.3.1 Genomförande av för- och eftertest

Då för- och eftertestet redan har använts i en tidigare kurs valde vi att använda det även till denna studie. Detta förtest var konstruerat så att det även passade vårt syfte. Vi vill poängtera att eftertestet är samma test som förtestet för att kunna se skillnader i vad eleverna har lärt sig. Samma förtest användes till samtliga elever. Learning studyn var schemalagd under en period på sex veckor med ett uppehåll på två veckor efter tredje veckan. För att det inte skulle dröja för länge mellan förtest och lektion för C-gruppen valde vi att genomföra förtestet med eleverna vid olika tillfällen. Vid samtliga tillfällen av genomförandet av för- och eftertesten samlades den aktuella gruppen elever i skolans bibliotek där vi berättade vad de skulle göra. I samband med förtesten förklarade vi för eleverna att vi var medvetna om att eleverna låg på olika nivåer

kunskapsmässigt och att det inte var något prov som de var tvungna att klara av. Det vi önskade var att se vad de kunde kring detta ämne så att vi kunde planera en lektion utifrån den aktuella elevgruppen och utföra lektionen på ett sådant sätt att lärandet av lärandeobjektet möjliggörs på ett optimalt sätt. Genom detta ville vi att pressen på eleverna skulle minska. Efter den korta presentationen placerades eleverna ut en och en runt olika bord med böcker mellan dem för att de skulle kunna arbeta ostört. För att undvika slarvfel ombads eleverna att ögna igenom testet när de kände sig färdiga. För- och eftertestet tog cirka 20-30 minuter per tillfälle, men de som var i behov av mer tid fick detta. För att undvika att de elever som var i behov av längre tid skulle känna sig stressade väntade vi en stund med att skicka tillbaka eleverna till respektive klassrum. Under tiden fick de elever som redan var klara teckna på baksidan av testet. Förtestet till lektion 1 genomfördes nio dagar före den aktuella lektionen och eftertestet dagen efter lektionen. Förtestet till lektion 2 genomfördes även det nio dagar före lektion 2 och eftertestet dagen efter lektionen. Förtestet till lektion 3 genomfördes två dagar innan lektionen och eftertestet dagen efter lektionen. Vid rättning av för- och eftertesten satt vi gemensamt för att kunna rätta så lika som möjligt. Lärare 1 ansvarade för fyornas test, lärare 2 för sexornas och lärare 3 för femmornas. Vid rättningen uppkom diverse oklarheter i elevernas svar, vilket ledde till att vi beslutade oss för att intervjua vissa elever för att förstå varför de hade svarat som de gjort. Vid djupare analys av för- och eftertest numrerades testen för att kunna återgå till samma test igen ifall oklarheter uppstod.

3.3.2 Lektionsplanering

Utifrån rättningen kom vi fram till vissa kritiska aspekter som eleverna tidigare inte haft möjlighet att urskilja för att förstå lärandeobjektet bråk. Till en början upptäcktes flertalet kritiska aspekter då det visade sig att fyorna inte hade arbetat med vare sig stambråk eller sammansatt bråk tidigare. Detta ledde till att vi fokuserade på att gå igenom stambråk istället för att kunna gå in djupare på sammansatta bråk. I den första lektionen valde vi att vara konkreta för att få samtliga elever att förstå mesta möjliga. Lektionsplaneringen genomfördes inför varje lektion, sammanlagt tre gånger. Utöver det hade vi även handledning där möjlighet gavs att diskutera vår planering med handledarna. Analys av videoupptagningen, planering av ny lektion samt handledning tog cirka fyra timmar per vecka.

3.4 Analys

Analysen av studien har skett i flera steg, dels studien i helhet men också varje enskild lektion samt analys av för- och eftertest. Inför varje ny lektion analyserade vi förtesten för att upptäcka vilka aspekter som var kritiska för att eleverna skulle förstå bråk. Några av svaren i förtesten önskade vi undersöka närmare vilket ledde till att kompletterande intervjuer genomfördes för att förstå varför de svarat som de gjort. Under lektionerna filmade en av oss och den andra observerade vad som hände i klassrummet. Detta för att se till att vi fick med så mycket som möjligt av det som förekom under lektionen. Material som samlats in till den här studien är: förtest, eftertest, videoupptagningar, intervjuer och observation med tillhörande anteckningar och det är det som ligger till grund för analysen. Vid första analysen av för- och eftertest rättades var uppgift för sig, exempelvis hur många av eleverna som hade rätt på andra uppgiften, även om den uppgiften bestod av tre delar (a, b, c) och eleverna hade rätt på exempelvis a och b men

fel på c markerade vi fel på hela den andra uppgiften. Det här utfördes på detta sätt för att spara tid och som en första analys för att se helheten av resultatet på förtestet, eftertestet samt skillnaden mellan för- och eftertest. Vid första analysen av videoupptagningarna koncentrerade vi oss på att få syn på vad det var i upptagningarna som möjliggjorde elevernas lärande av lärandeobjektet, tillägnandet av bråk, hur vi som lärare uttryckte oss för att möjliggöra detta och även hur vi agerade under lektionen. Detta jämfördes sedan med resultat skillnaden mellan för- och eftertest för att planera nästa lektion. Vid andra analysen av videoupptagningarna har vi förutom att än en gång se vilka kritiska aspekter som varierats för att möjliggöra lärandet för eleverna även vägt in det transkriberade materialet och de anteckningar som förts under observationen av lektionen. Efter varje genomförd lektion analyserade vi lektionen tillsammans och antecknade vilka sekvenser i filmen som skulle vara intressanta att se närmare på samt vilken tidpunkt i filmen som vad skedde. Därefter tillkallade vi våra handledare på VFU-skolan och analyserade än en gång filmen tillsammans med dem.

Företrädesvis intressanta delar i videoupptagningen som skedde under lektionen såsom genomgång av stambråk och sammansatta bråk samt gruppernas redovisning av deras olika uppgifter har transkriberats. Transkriberingen av de här utvalda sekvenserna tog cirka 14 timmar. Under alla tre lektionerna var lärarnas röster tydliga, men stundtals hördes inte eleverna. När vi inte har hört vad eleverna säger markerades den meningen eller det ordet med: [ohörbart]. När någon under videoupptagningen gjorde något som var av intresse för studien har det kursiverats. Vid två av de utförda lektionerna, den första och den tredje förelåg vissa svårigheter att uppfatta elevernas röster i den grupp som har filmats under gruppdiskussionen. Under första lektionen hade vi ingen tillgång till en extern mikrofon och vid den tredje lektionen blev inställningen på den externa mikrofonen fel, trots att vi inför lektionen hade testat utrustningen.

Efter att alla lektioner var genomförda bestämde vi oss för att gå in på den djupare analysen av för- och eftertesten. En av oss rättade samtliga test för att det skulle bli så lika rättat som möjligt men vi bestämde gemensamt hur rättningen skulle gå till. Vi har använt oss av fyra olika kategorier. På de uppgifter eleverna svarade helt fel på fick de 0 poäng. Vid tidigare rättning och intervjuer upptäcktes att vissa elever svarat korrekt på en viss fråga utan att egentligen ha en förståelse för det som de har svarat. Ett exempel är fråga 6 i testet (bilaga 1) där eleverna skulle ringa in 1/3 av 9 kolor, vilket många elever också gjort. Vid intervjuerna framkom dock att eleverna ringade in 3 stycken för att de endast såg trean och trodde då att det var så de skulle göra. På dessa frågor där vi tydligt visste att eleverna inte förstått fick eleverna 1 poäng. Vi upptäckte även att eleverna ibland kunde svaret fast de gjorde slarvfel, på dessa frågor fick eleverna 2 poäng. På de frågor som de svarade helt korrekt fick de 3 poäng. Våra kategorier blev således:

Fel = 0

Rätt men utan förståelse = 1

Fel men med förståelse = 2

Helt rätt = 3

För att underlätta för läsaren har vi valt att kategorisera de förändringar som skett från elevernas förtest till eftertest. Om resultatet har ökat med 1-4 poäng kallas det en svag förbättring, 5-9 poäng någon förbättring och har resultatet ökat med 10 poäng eller mer har det har skett en märkbar förbättring på uppgiften. Om resultatet istället har

försämrats med 1-4 poäng kallas det för en svag försämring och har uppgiften försämrats med 5-9 poäng har det skett någon försämring. Om uppgiften varken har ökat eller minskad kallas det för neutralt resultat. Dessa kategorier gäller för figurerna 5, 10 och 15.

Vid rättningen har vi valt att endast fokusera på elevernas kunskap i matematik och försökt se bort från eventuella missuppfattningar på grund av bristande läsförståelse. I exempelvis uppgift fem var det några elever som istället för att måla $\frac{1}{4}$ av rutan, målade en cirkel och markerade $\frac{1}{4}$ av denna. Vi förstår då att de har förståelse för vad $\frac{1}{4}$ är även fast de inte gjorde exakt som det stod i uppgiften.

3.5 Trovärdighet

En av anledningarna till varför vi har valt att filma lektionerna är för att få en möjlighet att få syn på vilket sätt eleverna uppfattar lärandeobjektet ur ett annat perspektiv än det vi själva har erfårit under lektionens gång (Holmqvist, Lövdahl & Strömberg, 2006). Vidare har videofilmningarna av lektionerna underlättat när vi önskar se den lagrade verkligheten flera gånger och för att undersöka hur vi uppfattade den lektionen samt för att kontrollera pålitligheten (Patel & Davidson, 2003). Vid videoupptagning möjliggörs att identifiera skeenden utifrån ett annat perspektiv. Olika aktiviteter på lektionen som sker kan uppmärksammas och räknas beroende på vad man är ute efter att upptäcka (Stiegler & Hiebert, 1999).

Materialet som vi har samlat in till den här studien har analyserats under flera tillfällen och fler personer såsom våra handledare på skolan där studien har genomförts har medverkat vid analysen. Detta bidrar till att resultatet är mer tillförlitligt än om endast vi som studieförfattare hade analyserat materialet (Holmqvist, Lövdahl & Strömberg, 2006). Det resultat som uppnåts under den här studien är produkten av en kvalitativ och kvantitativ forskningsprocess. Resultatet är unikt för den aktuella sammansatta grupp av elever som vi har genomfört studien på och det finns inga regler som kan säkerställa validiteten. Det här betyder att om någon genomför studien en gång till på en annan grupp elever kan resultatet ändå bli likartat förutsatt att den genomförs på liknande grupper och med liknande lärandesituationer (Holmqvist, Lövdahl & Strömberg, 2006; Patel & Davidson, 2003). Vid transkribering av rådata är det centralt att den som transkriberar är medveten om på vilket sätt transkriberingen sker för att det kan påverka analysen (Patel & Davidson, 2003). På grund av det lät vi endast en person arbeta med transkriberingen.

3.6 Forskningsetik

Forskaren har forskningsetiska krav att förhålla sig till inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning, dessa är; informationskrav, samtyckeskrav, konfidentialitetskrav och nyttjandekrav. Vad dessa betyder ämnar vi beskriva med start av informationskravet, där forskningsuppgiftens syfte ska synliggöras för de av studiens berörda parter samt att till studiens använda information inte ska användas till något annat än till studien. Samtyckeskravet uttrycker undersökningsdeltagarnas rätt att själva besluta över sin medverkan. När det rör omyndiga personer, exempelvis barn, kan det förväntas att samtycke dessutom inhämtas från förälder/vårdnadshavare. Data om varje person som ingår i en undersökning ska ges största möjliga konfidentialitet och

personuppgifterna ska förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem, detta enligt konfidentialitetskravet. Sista kravet är nyttjandekravet där uppgifter insamlade om enskilda personer endast får användas för forskningsändamål (Vetenskapsrådet, 2009).

För att tillgodose informationskravet och samtyckeskravet använde vi oss av en blankett (bilaga 2) som skickades med eleverna hem till deras vårdnadshavare. En del av denna blankett skulle tas med tillbaka till skolan, ifylld och undertecknad av vårdnadshavaren om de samtyckte att eleven skulle medverka i vår studie. Alla för- och eftertest samt videoupptagningarna har förvarats på ett sådant sätt att andra personer inte har haft tillgång till dem. För- och eftertest har numrerats för att ingen utomstående ska kunna lista ut vilken elev som har svarat på ett visst sätt. Efter att studien är godkänd kommer vi att eliminera all rådata så som för- och eftertest samt videoupptagningar.

4. Resultat

I detta avsnitt presenteras resultatet från de tre cyklerna som har genomförts i vår learning study. En cykel i taget beskrivs där vi lyfter övergripande likheter och skillnader i lektionsuppläggen, elevernas förkunskaper inför den aktuella lektionen, kritiska aspekter som har upptäckts, upplägget av den aktuella lektionen samt elevernas kunskaper efter den aktuella lektionen. I slutet av beskrivningen av varje cykel presenteras ett diagram över differensen mellan för- och eftertest på de uppgifter där elevernas resultat har förändrats eller där ingen förändring har skett.

Vi har valt att benämna varje elev med siffror och även vilket test de har gjort. Om eleven har medverkat i förtestet med A-gruppen får eleven benämningen AF och en siffra, exempelvis AF3. Om eleven medverkat i eftertestet med B-gruppen och fått nummer 15 får eleven benämningen BE15 och så vidare. Eleverna tilldelades siffror i samband med rättningen utan inbördes ordning. Vi har valt att presentera bilder under rubriken elevernas förkunskaper innan lektionen samt bilder under rubriken elevernas kunskaper efter lektionen. Det är samma elev som har utfört samma uppgift under båda rubrikerna. Under bilderna används dessa benämningar som är beskrivet ovan och på så sätt kan läsaren se vilka bilder som hör ihop.

I bilaga 3 har en procenttabell sammanställts där vi har räknat ut elevernas antal rätt på för- och eftertest i procent, och även skillnaden mellan för- och eftertest i procentenheter. Tabellen har använts vid sammanställningen av resultatet.

4.1 Övergripande likheter och skillnader i lektionsuppläggen

Tabell 1 nedan visar vilka moment som ingick i respektive lektion.

Tabell 1. Övergripande genomgång av lektionsuppläggen

Lektion 1 (A-grupp)	Lektion 2 (B-grupp)	Lektion 3 (C-grupp)
Läraren delar ett äpple och talar kring delarna.		Läraren delar ett äpple och talar kring delarna.
Läraren <i>klipper isär</i> och sätter upp stora cirklar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.	Läraren sätter upp stora delade cirklar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.	Läraren sätter upp stora delade cirklar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.
Läraren <i>klipper isär</i> och sätter upp små cirklar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.		
Läraren <i>klipper isär</i> och sätter upp rektanglar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.	Läraren sätter upp delade rektanglar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.	Läraren sätter upp delade rektanglar på tavlan och går igenom vad de olika delarna kallas.
	Läraren visar med hjälp av rektanglarna och cirklarna att delarna måste vara lika stora.	
Läraren går igenom sammansatta bråk med hjälp av rektanglarna.	Läraren går igenom sammansatta bråk med hjälp av nya små cirklar.	Läraren går igenom sammansatta bråk med hjälp av nya små cirklar.
Gruppuppgift och redovisning av gruppuppgift.	Gruppuppgift och redovisning av gruppuppgift.	Gruppuppgift och redovisning av gruppuppgift.

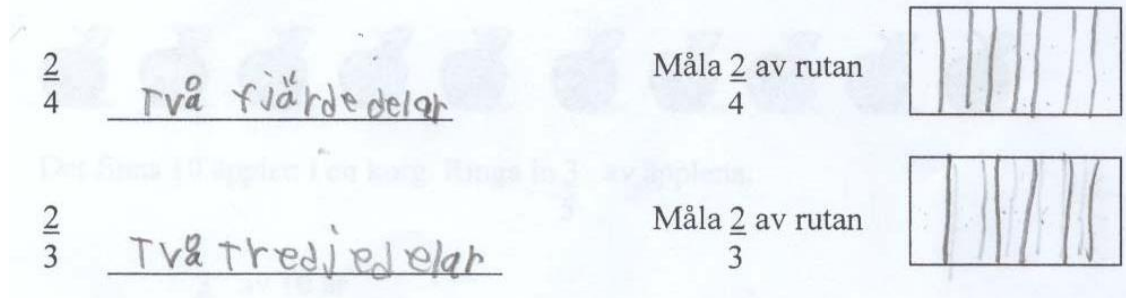
I varje moment har vi medvetet skapat ett mönster av variation och invarians i lektionsupplägget, genom att bland annat variera nämnaren och hålla täljaren konstant och därefter variera täljaren och hålla nämnaren konstant. Lektionerna var planerade med variationsteorin som utgångspunkt.

4.2 Lektion 1

Här nedan beskrivs vad eleverna i A-gruppen hade för förkunskaper inför lektion 1, genomgång av lektion 1 samt elevernas kunskaper efter lektion 1.

4.2.1 Eleverna i A-gruppens förkunskaper inför lektion 1

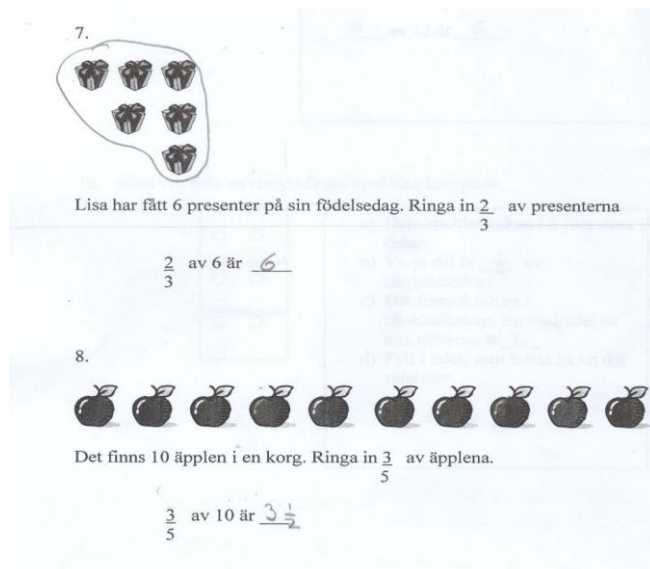
Något som ansågs vara komplext utifrån förtesten var att vi hade skilda åldrar på eleverna, både fyror, femmor men även sexor, vilket också betydde att de hade olika förkunskaper då sexorna och även femmorna har undervisats om bråk medan fyror inte kommit i kontakt med det tidigare i skolan. Utifrån fyornas förtest märktes tydligt att eleverna hade arbetat med multiplikation och division, därför löste de uppgifterna utifrån sina förkunskaper, se exemplet nedan:



Figur 3. AF17

Lösningen i figur 3 visar att eleven kan skriva bråk med bokstäver men har svårigheter med innebörden av två fjärdedelar och två tredjedelar. Han använder sig istället av multiplikation och delar upp rutan i $2 \times 4 = 8$ delar och $2 \times 3 = 6$ delar.

Vid analys av förtest upptäcktes att de vardagsnära uppgifterna innehållande stambråk såsom uppgift 1, 2, 3 och 4 i förtestet (bilaga 1) där eleverna delade en pizza i en halv och i fjärdedelar samt att de delade lika på godis inte innebar några större problem för eleverna. De flesta svårigheter fann vi i uppgift 7 och 8 i förtestet, där eleverna skulle dela upp ett antal föremål med hjälp av sammansatta bråk, se exempel nedan:



Figur 4. AF1

I figur 4 uppgift 7 har eleven ringat in alla paket som finns på bilden. Eleven kan här ha använt sig av multiplikation och multiplicerat 2 med 3. På uppgift 8 har eleven istället använt sig av division och delat de tio äpplena i tre högar och fick därmed fram

svaret $3\frac{1}{2}$. Uppgifterna som ses i figur 3 och 4 var de uppgifter som eleverna i A-gruppen hade svårast att lösa. Även uppgift 9c och 10d där eleverna skulle fylla i talen som fattades (utifrån tidigare uppgifter) så att det stämde, exempelvis; ___ av 12 är ___, hade flertalet elever svårigheter med.

4.2.2 Kritiska aspekter

Vissa elever visade i förtestet att de hade brister i kunskapen om att nämnaren står för helheten och täljaren för antalet delar. Vi upptäckte även i exempelvis uppgift 5 i förtestet (bilaga 1) att vissa elever hade bristande kunskap i att alla delar måste vara lika stora. När det kommer till förståelsen av bråkstrecks betydelse visade det sig att vissa elever inte förstod vad det stod för. De skrev till exempel ett delat på fyra istället för en fjärdedel. Eleverna såg det som en räkneoperation, något som ska utföras istället för att endast se själva bråket. Genom att exempelvis skriva $\frac{4}{1}$ istället för $\frac{1}{4}$ när de avsåg att skriva bråk med siffror visar de att de har bristande kunskaper i detta. Ett fåtal elever hade svårigheter med att förstå att det mesta går att dela på oavsett form eller antal. I uppgift 5 i förtestet där eleverna ämnade dela upp rutan i exempelvis $\frac{1}{4}$ har vissa elever ritat en cirkel och delat denna i fyra delar. Genom analys av de första förtesten kom vi således fram till följande kritiska aspekter:

1. Täljaren och nämnarens betydelse
2. Alla delar måste vara lika stora
3. Bråkstrecks betydelse
4. Hur bråk skrivs med siffror
5. Ett antal föremål kan ses som en helhet
6. Delen kan se olika ut beroende på helheten

Då eleverna befann sig på en sådan spridd kunskapsnivå på grund av att gruppen bestod av elever ur år 4-6, gavs möjligheten att finna ett flertal kritiska aspekter.

4.2.3 Upplägg av lektion 1

Utifrån förtesten i A-gruppen påträffades att vissa elever hade bristande kunskaper kring både stambråk och sammansatta bråk och vi startade därmed på grundnivå för att även få med dessa elever. Lektionen inleddes med något vardagsnära för eleverna genom att dela ett äpple i två delar och tala om en halv och sedan dela halvorna i två delar och tala om fjärdedelar. Ett nytt äpple delades sedan i två olika stora delar. Detta gjordes för att eleverna skulle få möjlighet att urskilja att alla delar måste vara lika stora. Här behålls antalet delar konstant men storleken på delarna varierar då ena delen är liten och den andra är stor. Därefter frågade vi vad varje del kallas för att poängtera att alla delar måste vara lika stora för att få klassas som halvor och fjärdedelar. Här nedan är ett citat ur den första lektionen som kan visa på vilket sätt vi valde att belysa denna kritiska aspekt och hur en elev svarade:

- Lärare: Å det är ju viktigt att det är lika stora delar för att det ska få kallas fjärdedelar och halvor. Om man delar såhär. *Läraren delar ett annat äpple i två delar och håller upp för klassen.* Nu har jag delat det här äpplet i två delar. *Läraren håller upp en del.* Vad kan man kalla en sån del då?
- Elev: Dom är inte lika stora.

Därefter satte läraren upp en stor gul cirkel på tavlan och talade om att det är en hel cirkel och om hur man kunde skriva med siffersymboler att det var en hel cirkel. Läraren tog en röd cirkel som klipptes isär i två delar och sattes upp på tavlan. Samma procedur gjordes med tredjedelar, fjärdedelar och femtedelar med ny färg för varje cirkel. Vid klippningen av cirkelarna och rektanglarna betonade läraren att alla delarna måste vara lika stora. En elev i taget fick komma fram och skriva bråkuttrycket på varje del. Därefter gjorde läraren precis som tidigare fast utgick istället från mindre cirklar, med samma färgmönster, som sattes upp i höjd med de stora cirkelarna. Läraren utgick sedan från rektanglar, även de med likadant färgmönster som cirkelarna, och genomförde samma procedur som ovan. Färgen på cirkelarna och rektanglarna var invarianta under lektionen. Den hela cirkeln och rektangeln var båda gula och hela, rektangeln och cirkeln som var delad i två lika stora delar hade röd färg och så vidare, (se taveldisposition bild 1 s. 22). Detta gjordes för att skapa ett färgmönster för att eleverna skulle urskilja att delarna kan se olika ut beroende på hur helheten ser ut. När cirkelarna och rektanglarna placerades på tavlan valde vi att börja från vänster och fortsatte sedan åt höger. Vid genomgången av cirkelarna och rektanglarna synliggjordes nämnarens betydelse då täljaren behölls invariant och nämnaren varierades. Bråkstreckets betydelse belystes genom att läraren vid upprepade tillfällen benämnde det som skrevs på tavlan, stod det: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, eller $\frac{1}{4}$ blev det således benämnt som en halv, en tredjedel och en fjärdedel. När läraren skrev bråkstrecket på tavlan synliggjordes det även för eleverna hur de skulle skriva bråk med siffersymboler. För att visa täljaren och nämnarens betydelse gjorde läraren på följande sätt:

Lärare: Så, nu vet ni hur man skriver en del av något, eller hur? En halv skriver man så, en halv av en hel. *Läraren pekar på de olika delarna medan hon benämner de olika delarna.* En tredjedel av en hel, det är en tredjedel av en hel och en fjärdedel, en fjärdedel är ju en bit av fyra eller hur?

Läraren förklarade att beroende på vilken helhet man har från början kan delen se olika ut:

Lärare: Om ni kollar lite här så är detta en tredjedel och det är ju också en tredjedel men dom är inte lika stora för vad är det som det måste vara lika stort utav då? Utan det är det från början va? Så en tredjedel kan ju se olika ut beroende på vad helheten är, om jag delar det här bordet i lika stora delar så blir ju det mycket större än en tredjedel av ett äpple, är ni med på det?

Läraren utgick sedan från rektanglarna och visade eleverna hur man kunde arbeta och tänka med sammansatta bråk. Läraren drog isär $\frac{2}{3}$ av rektangeln och frågade vad denna del kallades och även hur man skrev detta med siffersymboler. Likadant gjordes med $\frac{2}{4}$ (jämförde då även med en halv), $\frac{3}{4}$ och även $\frac{4}{4}$ och betonade då att det också blev en hel igen. I detta moment varierar täljaren och nämnaren hålls konstant för att eleverna ska ha möjlighet att urskilja täljarens betydelse.

För att belysa att ett antal kan ses som helhet fick eleverna arbeta i grupp med en uppgift. Läraren delade ut 12 päronkort till de fem grupper med tre-fyra elever i varje grupp. Varje grupp fick en uppgift var och de uppgifter som delades ut var: $\frac{2}{3}$ av 12, $\frac{4}{6}$ av 12, $\frac{3}{4}$ av 12, $\frac{3}{6}$ av 12 samt $\frac{2}{4}$ av 12. Tanken med detta var att hålla antalet päron som helhet konstant men variera delarna av antalet, för att synliggöra både nämnaren och täljarens roll. Efter diskussioner i grupperna fick varje grupp redovisa sina resultat inför klassen genom att ringa in päron på en overhead så att alla i klassen skulle se. Läraren skrev följande på tavlan: ____ av 12 är _____. En elev ur varje grupp

fick efter sin redovisning fylla i svaret på tavlan, dock var det ett par grupper som inte skrev själva på tavlan. Läraren visade på följande sätt att ett antal nu var helheten:

Lärare: För nu är det ju inte, nu är helheten alla tolv pärenen. Eller hur, nu är detta helheten
Läraren visar genom en handrörelse över samtliga OH-pärenen.
Förut var helheten en rektangel, *pekar på rektangeln*, eller en cirkel, *pekar på cirkeln*, men nu är helheten alla tolv pärenen så då tog hon först en tredjedel av pärenen och det är ju det hon har ringat in. Ser ni det?

Täljaren och nämnarens betydelse synliggjordes även när eleverna fick redovisa sina pärenuppgifter:

Lärare: Då visar ju tvåan att vi har tagit två delar av de här tredjedelarna, ...

I bild 1 nedan syns mönstret av variation och invarians av täljaren och nämnaren lodrät och vågrät syns färgmönstret där till exempel alla halvor har samma färg oavsett storlek och form. Samtliga cirklar och rektanglar fick sitta kvar under hela lektionen för att eleverna skulle ha möjlighet att följa lektionens upplägg från början till slut.

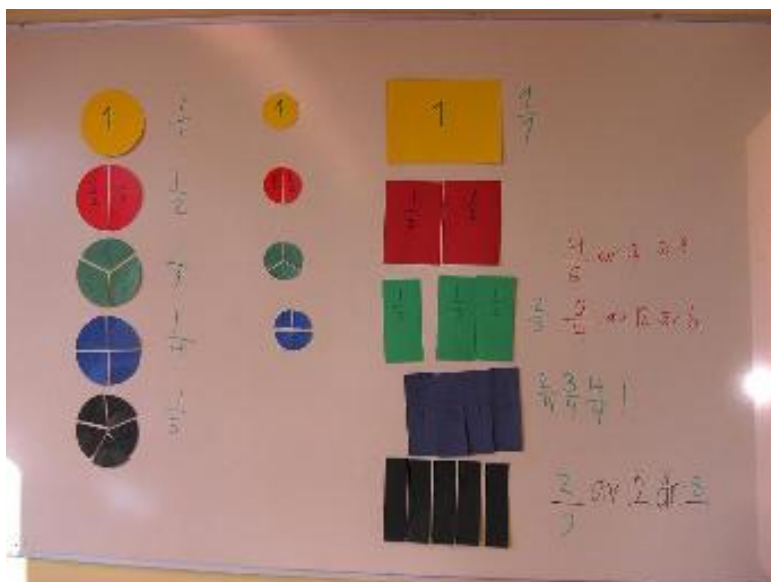
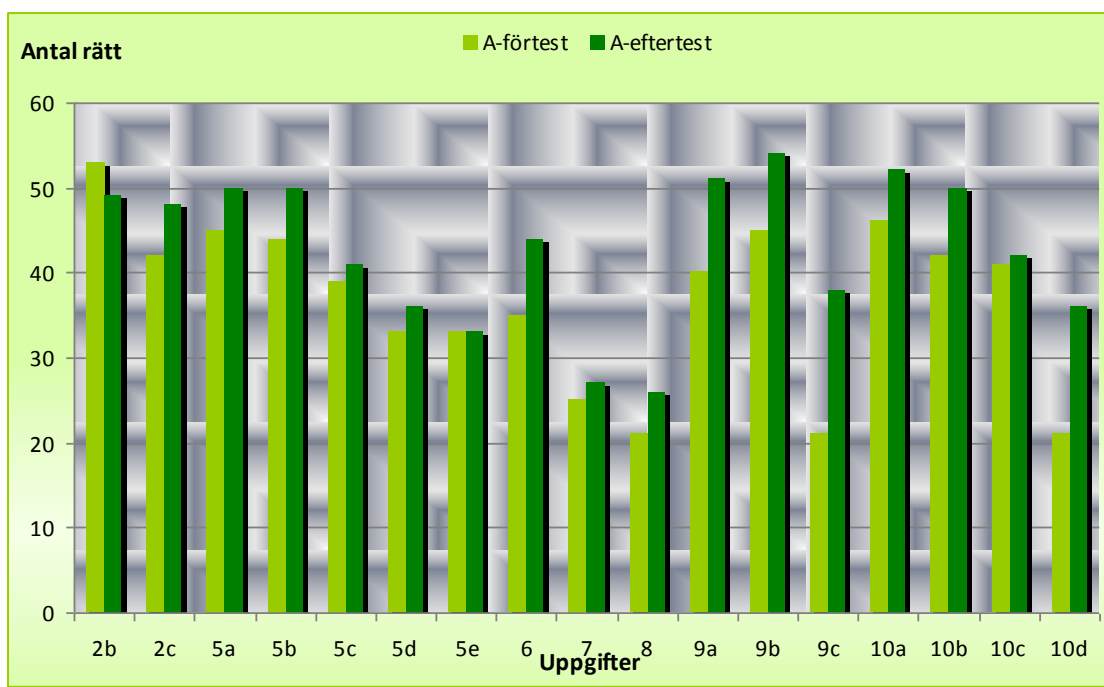


Bild 1. Taveldisposition lektion 1

4.2.4 Elevernas kunskaper i A-gruppen efter lektion 1

I figur 5 nedan syns elevernas resultat från för- och eftertest i A-gruppen. Då elevantalet i denna grupp var 18 och maxpoängen på en fråga är 3 blev den högsta totala poängen 54. De uppgifter som eleverna både på för- och eftertestet hade 100 % rätt på togs bort då dessa inte var relevanta för studien. Därmed syns endast de uppgifter där elevernas resultat har förändrats samt de uppgifter där resultaten är oförändrade, se nedan.

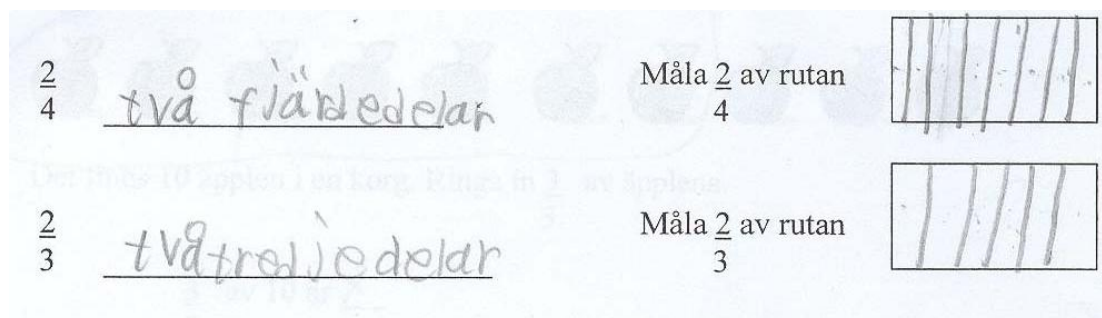


Figur 5. Resultat från A-gruppens för- och eftertest. Max antal rätt på en fråga är sammanlagt 54 poäng.

Tabell 2. Differens mellan för- och eftertest A:

Uppgift	2b	2c	5a	5b	5c	5d	5e	6	7	8	9a	9b	9c	10a	10b	10c	10d
Förändring	-3	6	5	6	2	3	0	9	2	5	11	9	17	6	8	1	15

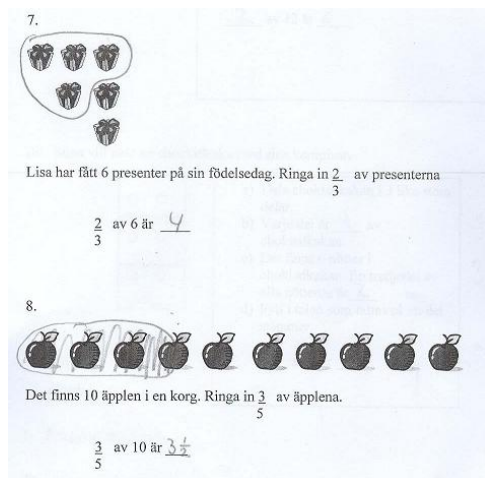
Vid analys av eftertesten upptäcktes vissa förbättringar, dock inte inom just sammansatta bråk som visar om eleverna lyckats urskilja täljaren och nämnarens betydelse. En märkbar förbättring hade skett på uppgifterna; 9a, 9c och 10d som behandlar del av en helhet och del av ett antal. Någon förbättring noterades på uppgift 2c där eleverna skulle skriva $\frac{1}{4}$ med siffror. Även på uppgift 5a och 5b som handlar om hur man skriver stambråken $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{2}$ med bokstäver samt att eleverna skulle visa att de förstått innebörden av dessa bråkuttryck genom att måla exempelvis $\frac{1}{4}$ av en ruta. Även uppgift 6, 8, 9b, 10a och 10b visade på någon förbättring. Dessa uppgifter förutsätter att eleverna förstår delar av ett antal föremål. Svag förbättring har skett på uppgifterna; 5c, 5d, 7 och 10c. Oförändrat resultat på uppgift 5e som behandlar sammansatta bråk och en svag försämring på uppgift 2b där eleverna skulle skriva $\frac{1}{4}$ med bokstäver är antecknat. Se närmare på uppgifterna i eftertestet i bilaga 1.



Figur 6. AE17

Lösningen i figur 6 ovan har inte förändrats på denna uppgift från förtestet. Eleven kan fortfarande skriva ut bråket med bokstäver men han förstår inte innebörden av vad

bråkuttrycket står för då han fortfarande använder sig av multiplikation när han ska dela upp rutan.



Figur 7. AE1

Lösningen i figur 7 ovan visar på en förbättring på uppgift 7 då hon på förtestet svarade 6 paket och på eftertestet 4 paket vilket är rätt svar. Frågan är dock om hon har förstått det hon har gjort då hon på fråga 8 fortfarande använde sig av division och delade de tio äpplena i 3 högar.

Sammanfattningsvis ser vi att eleverna i A-gruppen efter lektion 1 främst har lärt sig stambråk men inte sammansatta bråk vilket kan bero på att eleverna inte gavs möjlighet att urskilja täljaren och nämnarens betydelse.

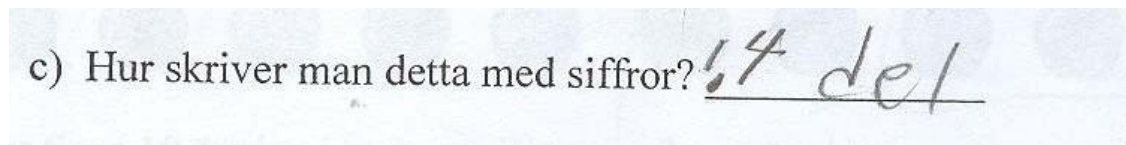
4.3 Planering av upplägg inför lektion 2

Som beskrivits ovan beslutade vi oss utifrån förtest 1 att fokusera på sex kritiska aspekter. Efter denna lektion upplevdes att det var för många kritiska aspekter att fokusera på under en och samma lektion. Därmed valdes att främst fokusera på tre kritiska aspekter inför lektion 2. Dessa var; täljaren och nämnarens betydelse, alla delar måste vara lika stora samt att ett antal föremål kan ses som en helhet. Utifrån videoinspelningen från lektion 1 upptäcktes att momenten att klippa isär cirklarna och rektanglarna i delar var tidskrävande. Till lektion 2 valde vi att ta bort detta moment då eleverna har utvecklat ett tillräckligt abstrakt tänkande. Genomgången av de små cirklarna togs även bort inför lektion 2. Genom att ta bort dessa moment inom stambråk som står beskrivet ovan var vår avsikt att eleverna skulle vara mer alerta vid genomgången av sammansatta bråk under lektion 2. En av uppgifterna byttes bort mot en annan i gruppuppgifterna, $2/6$ mot $3/3$, då sjättedelar inte har behandlats under lektionen. I övrigt var upplägget detsamma som i lektion 1.

4.3.1 Elevernas förkunskaper i B-gruppen inför lektion 2

Elevernas förkunskaper inför lektion 2 var i princip samma som eleverna i A-gruppens förkunskaper inför första lektionen. De flesta svårigheterna låg i sammansatta bråk och även bråk av ett antal. Däremot hade de flesta kunskaper inom vardagsnära stambråk. Nästan hälften av dessa elever kunde dock inte skriva bråk med siffror i uppgift 2c.

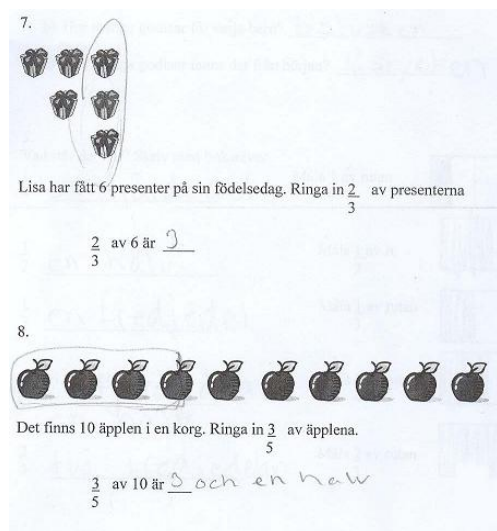
Lösningen i figur 8 visar tydliga brister i kunskapen om hur man skriver bråk med siffror:



Figur 8. BF12

Flertalet av eleverna visade bristande förståelse inom sammansatta bråk samt del av ett antal i uppgifterna 7 och 8. Lösningen i figur 9 visar att eleven har svarat tre paket på uppgift 7 och tre och ett halv äpple på uppgift 8.

:



Figur 9. BF13

4.3.2 Kritiska aspekter

Efter reduceringen av de sex kritiska aspekterna valde vi att fokusera på följande tre kritiska aspekter när det gäller elevernas förståelse av sammansatta bråk:

1. Täljaren och nämnarens betydelse
2. Alla delar måste vara lika stora
3. Ett antal föremål kan ses som en helhet

4.3.3 Upplägg av lektion 2

Lektionen såg i stort sett likadan ut som lektion 1 med vissa förändringar. Tanken var att inleda lektionen genom att dela äpplet på samma sätt som första lektionen men lärare 2 glömde detta moment. Istället inleddes denna lektion med att gå igenom de stora cirklarna och diskutera kring de olika delarna såsom, 1 hel, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ samt $\frac{1}{5}$. Eleverna fick själva komma fram och skriva delarna på tavlan. Nästa steg var att direkt övergå till rektanglarna och även där diskutera kring de olika delarna. Även i denna lektion var täljaren invariant och nämnaren varierade för att eleverna skulle ha möjlighet att urskilja nämnarens betydelse. Läraren exemplifierade detta på många olika sätt både med cirklar och rektanglar. Genom att variera formen skapades förutsättningar för att eleverna skulle kunna urskilja att helheten kan se olika ut och att

det är helheten eleverna måste utgå ifrån när de ska dela något. Då lärare 2 glömde att dela äpplet och därmed missade momentet där vi skulle visa att alla delar måste vara lika stora gjorde hon istället på följande sätt:

- Lärare: *Läraren sätter upp fyra delar av den blå rektangeln på tavlan.*
Om jag sätter ihop alla de här blir det en hel, men vad kallas en sådan del? (flicknamn)
- Elev: En fjärdedel.
- Lärare: *Pekar på en annan del.* (flicknamn)
- Elev: En fjärdedel.
- Lärare: En fjärdedel. Och här har vi en fjärdedel och här har vi en fjärdedel. Om jag sätter den här delen där då. *Sätter en svart del efter de blåa fjärdedelarna.* Vad kallas den delen *Pekar på den svarta delen.* (flicknamn)
- Elev: En femtedel.
- Lärare: En femtedel säger du.
- Elev: Ja, men, när de är tillsammans så blir de en hel och en femtedel.
- Lärare: Är den lika stor som den? *Läraren sätter en femtedel på en fjärdedel*
- Elev: näe.
- Lärare: Får jag säga att det är en femtedel då?
- Elev: hmm.
- Lärare: Även fast det är fem delar här?
En elev vänder sig till den eleven som läraren pratar med och säger nej lågt och skakar på huvudet, eleven som läraren pratar med skakar också på huvudet.
- Lärare: Det får jag inte va? Det syns nog mer om jag gör så här. Här är det tre delar nu. *Läraren har två tredjedelar och en femtedel bredvid varandra.* Men bara för att alla delarna är, bara för att det är tre delar så kan jag inte säga att det är en tredjedel det här för om jag jämför här så ser ni ju att den är ju absolut inte lika stor som den delen. *Sätter den svarta femtedelen på en tredjedel och sätter sedan femtedelen under fjärdedelarna tillsammans med resten av femtedelarna så att det blir en svart rektangel totalt.* Vad kallas en sådan del nu då? *Pekar på en femtedel.* (pojknamn)
- Elev: En sjättedel, eller tredjedelar.
- Lärare: En, är det en tredjedel det här?
- Elev: Två tredjedelar.
- Lärare: En sådan?
- Elev: Eller en sjättedel då.
- Lärare: Ska vi räkna hur många det är som vi har delat pappret i, en, två, tre, fyra, fem delar har jag delat pappret i, så vad kallas den delen då? (flicknamn)
- Elev: En femtedel

Efter detta moment satte läraren upp nya små cirklar på tavlan för att gå igenom sammansatta bråk med eleverna. Läraren drog till exempel isär $\frac{2}{3}$ av cirkeln och frågade eleverna hur stor del hon har tagit bort från helheten. Läraren genomförde samma sak med $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, och $\frac{4}{4}$. Här varierade täljaren och nämnaren var invariant. Gruppuppgiften med pären genomfördes på liknande sätt som vid lektion 1. De uppgifter som eleverna fick vid detta tillfälle var: $\frac{3}{3}$ av 12, $\frac{2}{6}$ av 12, $\frac{3}{4}$ av 12, $\frac{2}{3}$ av 12 samt $\frac{2}{4}$ av 12. På samma sätt som i lektion 1 är antalet pären invariant i alla uppgifter medan delarna varierar så att eleverna kunde urskilja både täljaren och nämnarens betydelse. Vid genomgången skrev läraren elevernas uppgifter på tavlan exempelvis: Vad är $\frac{2}{6}$ av 12? Eleverna fick sedan själva skriva sina svar efter frågan. Vid den gemensamma redovisningen förklarar läraren på olika sätt täljaren och nämnarens betydelse och visar med hjälp av pären på overheaden hur mycket en tredjedel av 12 är:

- Lärare: Ni gjorde tre högar, för det är tre delar, eller tredjedelar, så här ju en tredjedel, å här har vi en tredjedel och där har vi en tredjedel.

Senare visade läraren även hur mycket två tredjedelar respektive en tredjedel av 12 är:

Lärare: Så här har vi alltså. Ser ni här alltså, har vi två tredjedelar, två av tre. *Läraren för handen över de två tredjedelarna.*, Å här är ju en av tre. *Läraren visar med handen, en tredjedel.* Just vid detta fallet blir det fyra pæron i varje del.

Den kritiska aspekten att eleverna skulle förstå att ett antal föremål kan ses som en helhet kom fram på bland annat följande sätt:

Lärare: Så två, två sjättedelar, två av sex när det är tolv som är helheten blir alltså fyra, eller hur, det var den gruppen ni hade fyra i va?

I figuren nedan syns taveldispositionen efter lektion 2:

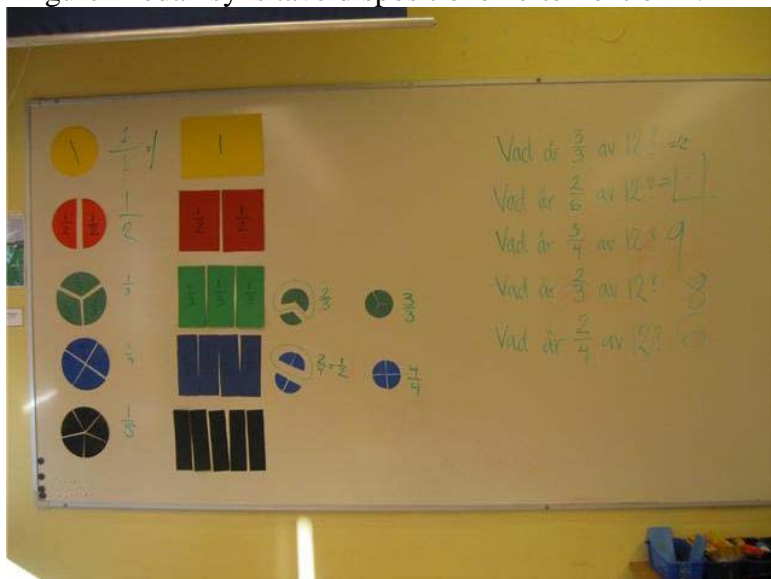
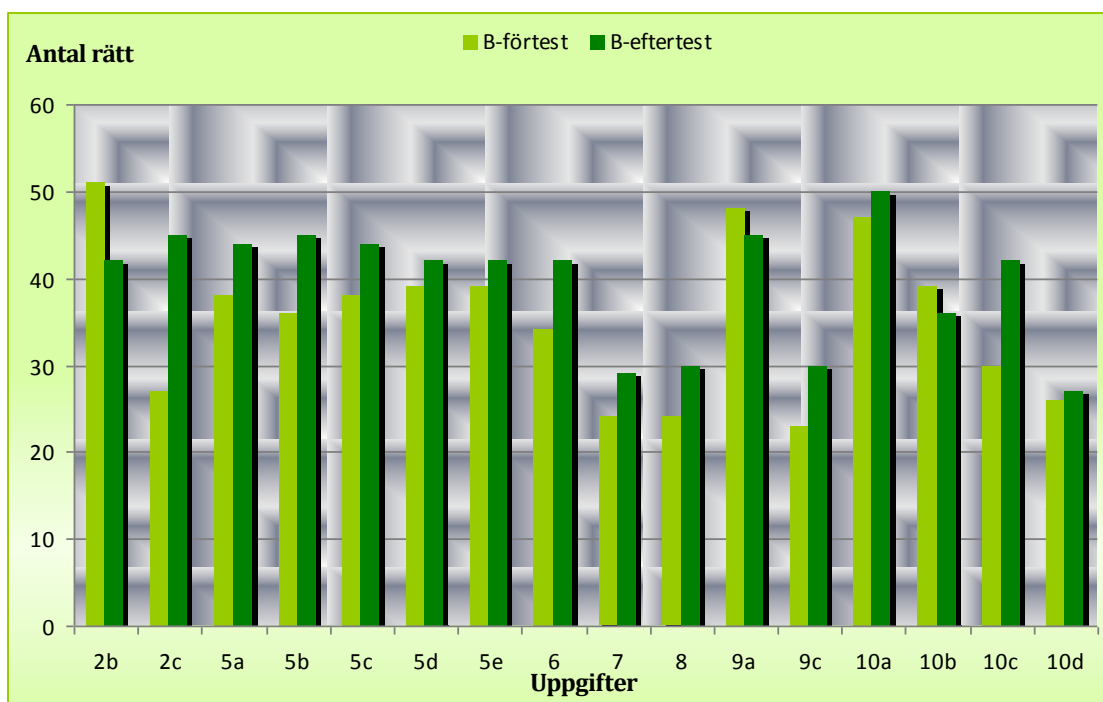


Bild 2. Taveldisposition lektion 2

4.3.4 Elevernas kunskaper i B-gruppen efter lektion 2

I figur 10 nedan syns resultatet från eleverna i B-gruppens för- och eftertest (se bilaga 1). Då elevantalet i denna grupp var 17 och maxpoängen på en fråga är 3 blev den högsta totala poängen 51. De uppgifter som eleverna både på för- och eftertestet hade 100 % rätt på togs bort då dessa inte var relevanta för studien. Därmed syns endast de uppgifter där elevernas resultat har förändrats samt de uppgifter där resultaten är oförändrade, se nedan:



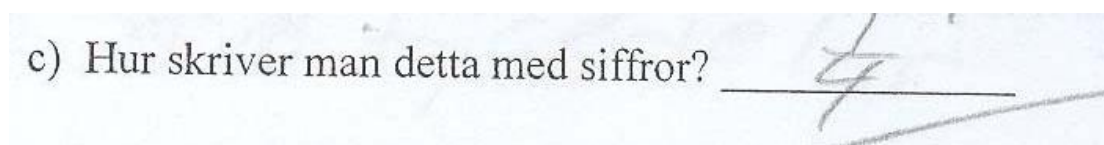
Figur 10. Resultat från B-gruppens för- och eftertest. Max antal rätt 51

Tabell 2. Differensen mellan antal rätt i B-gruppens för- och eftertest B:

Uppgift	2b	2c	5a	5b	5c	5d	5e	6	7	8	9a	9c	10a	10b	10c	10d
Förändring	-9	18	6	9	6	3	3	8	5	6	-3	7	3	-3	12	1

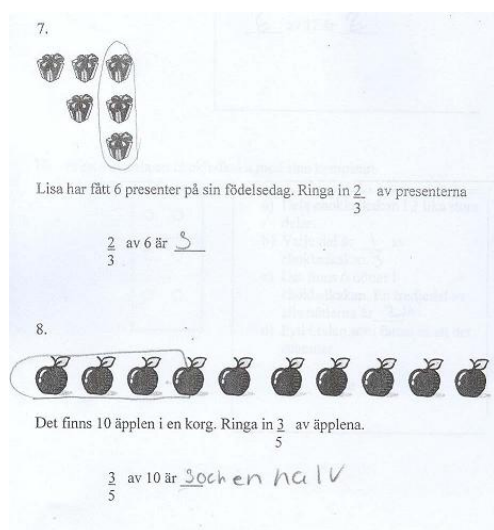
Märkbara förbättringar efter lektion 2 visade sig på uppgift 2c, hur man skriver en fjärdedel med siffror, och 10c, som handlar om en del av ett antal. Någon förbättring skedde på uppgifterna 5a, 5b, 5c, som behandlar hur man skriver stambråken $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ med bokstäver samt att eleverna skulle visa att de förstått innebörden av dessa bråkuttryck genom att måla exempelvis $\frac{1}{3}$ av en ruta. Det skedde även någon förbättring på uppgift 6 som gäller en del av ett antal, 7 och 8 som handlar om sammansatta bråk, samt uppgift 9c som rör sig om del av ett antal. När vi analyserar resultaten på uppgift 5 kan vi se att på de uppgifter som innehåller sammansatta bråk (5d och 5e) uppvisar eleverna endast svaga förbättringar då vi inte lyckats skapa förutsättningar där eleverna kan urskilja täljaren och nämnarens betydelse, trots justeringar efter lektion 1. Någon försämring skedde på uppgift 2b där eleverna skulle skriva $\frac{1}{4}$ med bokstäver och svaga försämringar skedde på uppgift 9a och 10b som gäller delar av ett antal. Se närmare på uppgifterna i eftertestet i bilaga 1.

Lösningen i figur 11 nedan visar på att eleven på eftertestet har kunskaper i hur man skriver bråk med siffror, vilket han inte hade på förtestet. Just inom denna fråga skedde en stor ökning på 35 procentenheter (se bilaga 3) mellan för- och eftertest;



Figur 11. BE12

Ökningen på uppgift 7 och 8 är 10 respektive 12 procentenheter från för- eftertest (se bilaga 3). Lösningen i figur 12 nedan visar att eleven inte förändrat sig alls på uppgift 7 och 8:



Figur 12. BF 13

Sammanfattningsvis lärde sig eleverna främst hur man skriver bråk med siffror efter lektion 2, men resultatet visar att flertalet elever inte har lyckats urskilja nämnaren och täljarens betydelse.

4.4 Förändringar av upplägg inför lektion 3

Lektion 3 inleddes med äpplet igen för att visa konkret för eleverna hur man kunde dela halvor och fjärdedelar. Där fick läraren in den kritiska aspekten att alla delar måste vara lika stora. Under denna lektion låg fokus på nämnaren och täljarens betydelse samt hur nämnaren och täljaren kan ses i kontrast till varandra. I övrigt var lektionsupplägget likadant som lektion 2 där läraren skapade mönster av variation och invarians som i sin tur möjliggjorde att eleverna kunde urskilja täljaren och nämnarens betydelse, att alla delar måste vara lika stora samt att ett antal kan ses som en helhet.

4.4.1 Elevernas förkunskaper i C-gruppen inför lektion 3

Utifrån förtesten i C-gruppen upptäcktes att flera elever hade svårigheter med uppgift 7 och 8, om maxpoängen motsvarade 100 % klarade 39 % både uppgift 7 och 8. Elev CF13 valde att inte svara alls på uppgift 8 i förtestet där de ämnade ringa in $3/5$ av 10 äpplen. Troligtvis tyckte eleven i fråga att detta var för svårt. Likaså elev CF16 valde att ej svara på en av uppgifterna i förtestet, i dennes fall uppgift 5d och 5e där eleverna både skulle skriva ut bråket $2/4$ och $2/3$ med bokstäver och även markera detta i en ruta.

4.4.2 Kritiska aspekter

Inför lektion 3 har vi valt att behålla samma kritiska aspekter som vid lektion 2:

1. Täljaren och nämnarens betydelse

2. Alla delar måste vara lika stora
3. Ett antal föremål kan ses som en helhet

4.4.3 Upplägg av lektion 3

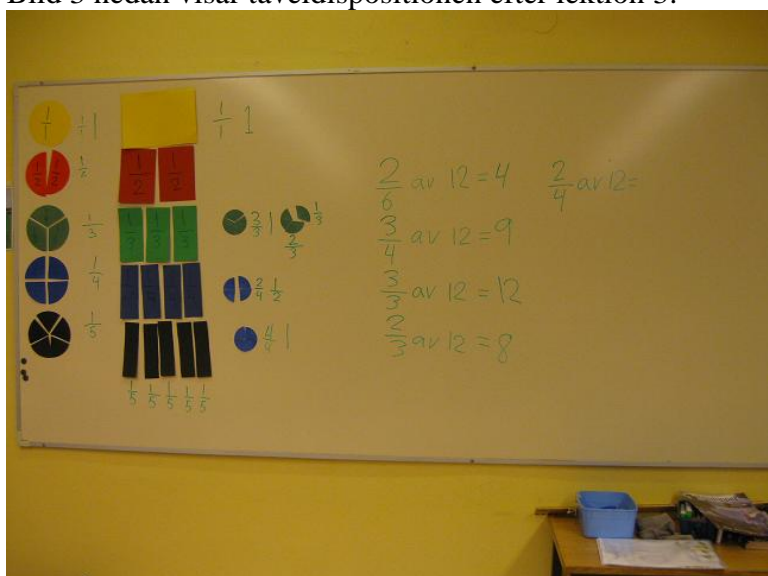
Redan efter cirka 5 minuter in i lektionen, vid genomgången av cirklarna, poängterade läraren vad täljaren och nämnaren står för. Läraren frågade eleverna vad ettan respektive tvåan stod för. Genom att hon synliggjorde skillnaden i täljaren och nämnarens betydelse gavs eleverna möjlighet att urskilja denna kontrast. Detta sätt att belysa täljaren och nämnarens betydelse samt att kontrastera dessa fortsatte som en röd tråd genom lektionen då läraren efter varje moment frågade eleverna vad de olika siffrorna stod för i bråkuttrycket samtidigt som hon även pekade på den aktuella siffran som hon pratade om:

- Lärare: Bra, ha, nu har vi delat den stora cirkeln i fyra delar, eller hur? Vad betyder fyran nu då? Vad säger du?
- Elev: En hel är delad i fyra.
- Lärare: En hel är delad i fyra delar, det är det som fyran talar om men vad betyder ettan då? Vad säger du?
- Elev: Eh, [ohörbart]
- Lärare: Vad sa du?
- Elev: En hel.
- Lärare: Näe, ettan betyder något annat, vad var det nu ettan betydde? (flicknamn)
- Elev: Att det är en av de fyra delarna.
- Lärare: Precis, ettan betyder att det är en, det här är en fjärdedel, för det är en del av fyra delar, ok? *Läraren pekar på de olika delarna.* Så det här är en fjärdedel. Det är en fjärdedel. Det här är en fjärdedel. Och det är en fjärdedel. *Läraren pekar på en fjärdedel i taget.*

Vid genomgången av päronuppgifterna poängterade läraren att helheten nu var 12:

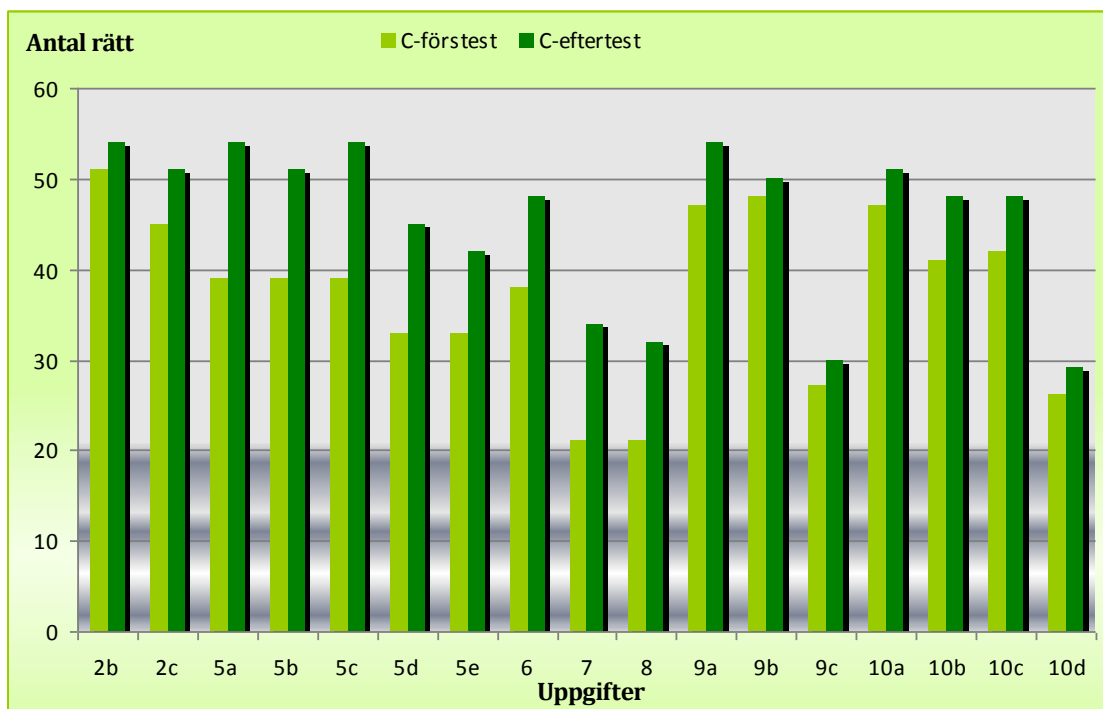
- Lärare: För att de skulle ha sjättedelar var det va? Precis. De behövde dela tolv päron i sex delar först och vad var det tvåan betyder nu då? Som vi pratade om förut? Vad betyder tvåan? (pojknamn)
- Elev: Två stycken.
- Lärare: De behöver ha två, njae, de skulle ha två delar av de sex delarna, eller hur? Så två delar av sex delar och de började med tolv, eller hur?

Bild 3 nedan visar taveldispositionen efter lektion 3:



4.4.4 Eleverna i C-gruppens kunskaper efter lektion 3

I figur 15 nedan syns resultatet från eleverna i C-gruppens för- och eftertest (se bilaga 1). Då elevantalet i denna grupp var 18 och maxpoängen på en fråga är 3 blev den högsta totala poängen 54. De uppgifter som eleverna både på för- och eftertestet hade 100 % rätt på togs bort då dessa inte var relevanta för studien. Därmed syns endast de uppgifter där elevernas resultat har förändrats samt de uppgifter där resultatet är oförändrat, se nedan.



Figur 15. Resultat från C-gruppens för- och eftertest. Max antal rätt 53

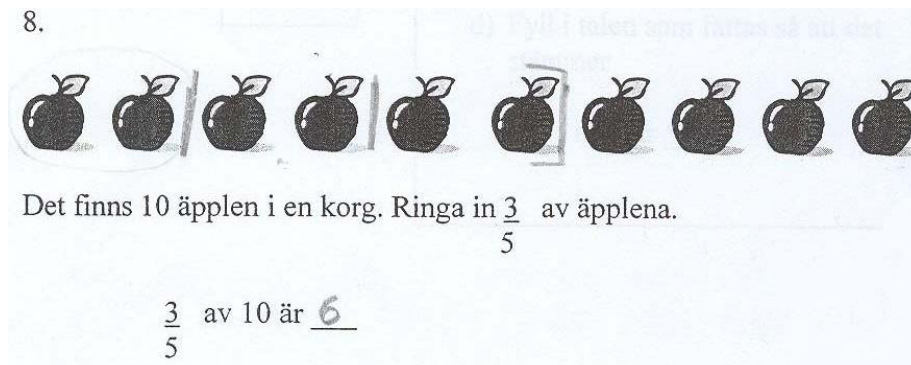
Tabell 4. Differensen mellan för- och eftertest C:

Uppgift	2b	2c	5a	5b	5c	5d	5e	6	7	8	9a	9b	9c	10a	10b	10c	10d
Förändring	3	6	15	12	15	12	9	10	13	11	7	2	3	4	7	6	3

Överlag har fler elever i C-gruppen förbättrat sig jämfört med A- och B-gruppen. Märkbar förbättring har skett på uppgifterna; 5a, 5b, 5c som behandlar hur man skriver stambråken $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$ med bokstäver samt att eleverna skulle visa att de hade förstått innebörden av bråkuttrycken genom att måla exempelvis $\frac{1}{3}$ av en ruta. Märkbar förbättring skedde även på uppgift 5d som rör sig om sammansatta bråk och uppgift 6 som handlar om en del av ett antal samt uppgift 7 och 8 som gäller sammansatta bråk med delar av ett antal. Någon förbättring har noterats på uppgifterna; 2c som handlar om hur man skriver $\frac{1}{4}$ med siffror, 5e som berör hur man skriver $\frac{2}{3}$ med bokstäver samt att eleverna skulle visa att de hade förstått innebörden av bråkuttrycken genom att måla $\frac{2}{3}$ av en ruta, 9a, 10b som behandlar en del av en helhet och 10c som handlar om en del av ett antal. Svag förbättring har skett i; 2b som gäller hur man skriver $\frac{1}{4}$ med bokstäver, 9b och 9c som rör sig om en del av ett antal, 10a som handlar om en del av en helhet och 10d som behandlar en del av ett antal. Flertalet eleverna har förstått täljaren och nämnarens betydelse genom att de lyckades urskilja

kontrasten mellan täljaren respektive nämnarens betydelse. Det blev lättare för eleverna att urskilja täljaren och nämnarens betydelse då eleverna fick möjlighet att se dessa kritiska aspekter samtidigt. Se närmare på uppgifterna i eftertestet i bilaga 1. I figur 16 kan ses hur eleven som i förtestet inte hade svarat något nu har löst uppgiften på eftertestet.

8.

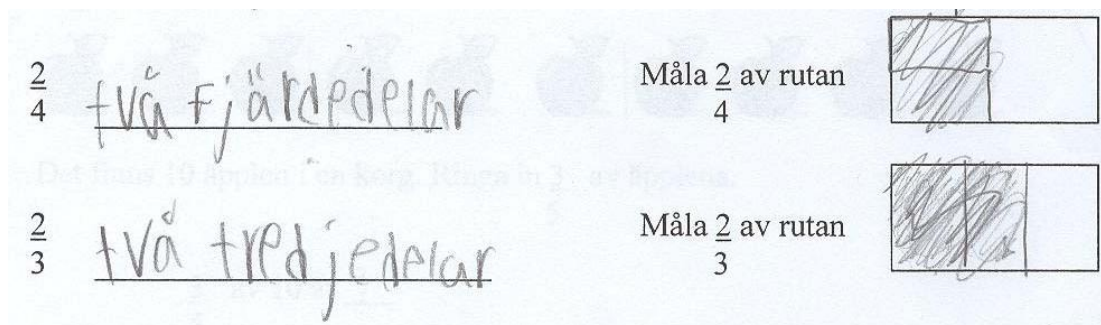


Det finns 10 äpplen i en korg. Ringa in $\frac{3}{5}$ av äpplena.

$\frac{3}{5}$ av 10 är 6

Figur 16. CE13

Lösningen i figur 17 visar att elev CE16 som heller inte hade svarat på förtestet nu har lyckats urskilja täljaren och nämnarens betydelse och därmed löst uppgiften.



$\frac{2}{4}$ två fjärdedelar Måla $\frac{2}{4}$ av rutan

$\frac{2}{3}$ två tredjedelar Måla $\frac{2}{3}$ av rutan

Figur 17. CE16

Sammanfattningsvis efter lektion 3 har fler elever än vid de tidigare lektionerna haft möjlighet att urskilja täljaren och nämnarens betydelse samtidigt genom att de kontrasterades mot varandra, vilket resulterade i ett procentuellt bättre resultat efter denna lektion (se bilaga 3).

4.5 Slutsats

De uppgifter som behandlade sammansatta bråk och del av ett antal har eleverna haft störst svårigheter med på förtesten. Alla tre lektioner har haft liknande mönster av variation och invarians i undervisningen. Trots detta ser vi vid jämförelsen av resultaten mellan de tre lektionerna att differensen mellan uppgifterna på för- och eftertest var väldigt lika mellan lektion 1 och 2 medan differensen på uppgifterna mellan för- och eftertest var störst på lektion tre. Vid analys av elevernas förtest märkte vi att eleverna i A-gruppen fick 65 % rätt, B-gruppen 67 % och C-gruppen 70 % på uppgift 6. Uppgiften som var ett stambråk med ett antal löd; David har 9 kolor. Ringa in $\frac{1}{3}$ av kolorna. $\frac{1}{3}$ av 9 är__ stycken. Uppgift 7 i förtestet handlar om sammansatta bråk av antal, vilket visade sig vara svårare för eleverna att lösa, 46 %, 47 % respektive 39 % blev svarsfrekvensen i de olika grupperna. Även i uppgift 8 som också den handlade om sammansatta bråk med antal hade eleverna svårigheter och resultatet blev 39 %, 47

% respektive 39 % i respektive grupper (se bilaga 3). Då resultatet i uppgift 6 förbättrades i A-gruppen till 81 % skedde en ökning med 16 procentenheter mellan för- och eftertest, i B-gruppen till 82 % vilket ledde till en ökning med 10 procentenheter och C-gruppen till 89 % vilket resulterade i en ökning med 19 procentenheter. Genom detta kan vi se i procenttabellen (bilaga 3) att det är de elever som tidigare inte kunnat urskilja de drag som är kritiska för att förstå bråk som vi når ut till genom att variera de kritiska aspekterna.

Liknande tendenser visar sig i uppgift 7 och 8. Att notera efter att ha studerat eftertestet är att slutresultatet på lektion 1 och 2 i uppgift 7 har landat på under 60 % procent (50 % och 57 %). På lektion 3 har slutresultatet hamnat på 63 %, detta beror på att lärare 1 och 2 inte visade på skillnaden mellan täljaren och nämnarens betydelse medan lärare 3 kontrasterade täljaren och nämnarens betydelse på ett tydligt sätt. Eleverna fick inte samma möjlighet att urskilja täljaren och nämnarens betydelse samtidigt under lektion 1 och 2 som de fick på lektion 3. Detta anser vi vara avgörande för att eleverna skulle lära sig bråk. *Slutsatsen av resultatet är att elevernas förutsättningar för att lära sig bråk ökade när läraren synliggjorde täljarens och nämnarens betydelse i kontrast med varandra samt genom att skapa ett tydligt mönster av variation och invarians i undervisningen.*

5. Diskussion

I diskussionen kommer konsekvenser av val att diskuteras utifrån de olika val vi gjort i studien. Resultatet kommer att diskuteras som även sammankopplas med vår teoretiska bakgrund.

5.1 Metoddiskussion

Under studiens gång har val gjorts, några av dem skulle säkerligen ha kunnat genomföras på något annat sätt. Ett beslut som togs rörande de elever som hamnade i bortfallsgruppen var att inte använda resultatet på dessa elevers för- eller eftertest i studien. Det var sex elever totalt, de elevernas bortfall har inte varit något som vi har kunnat påverka då eleverna har varit sjuka eller bortresta på någon eller några av de tre momenten (förtest, lektion respektive eftertest). Vi tror inte att bortfallsgruppens resultat skulle ha haft någon nämnvärd påverkan på studiens resultat men kan inte veta säkert.

Valet av en kvalitativ metod med kvantitativa inslag anser vi har stärkt studien då vi har valt att arbeta med en typ av aktionsforskning, där vi själva har varit aktiva i vår forskningsprocess och för att grupperna vi har haft framför oss har bestått av unika individer som alla har med sig olika förförståelse in på lektionen. Vi anser att en learning study kräver mer tid än vad vi hade tillgång till då vi hade kunnat analysera datan djupare. Vi har reflekterat över hur en djupare analys mellan lektionerna hade kunnat påverka vårt resultat. Hade vi kunnat finna fler eller annorlunda kritiska aspekter om vi fått tid till eftertanke? Är learning study som modell för tidskrävande för en studie som vår på 15 högskolepoäng? Andra forskningsrapporter som vi har tagit del av har forskaren inte själv haft hand om den grupp som undervisas utan oftast klassläraren men detta har vi sett mest som en fördel för oss, en chans att utveckla oss själva och vårt tankesätt.

Vid användandet av videoupptagning är det meningen att man ska kunna se lektionen utifrån ett annat perspektiv, och det finns möjligheter till det om man skulle vilja. För oss utföll det sig så att första gången filmen sågs fokuserade vi mestadels på vad som sades och hur vi agerade framme vid tavlan. För att komma över detta krävs det att filmen ses flera gånger, då har man möjlighet att fokusera på sig själv första gången och sedan på lärarens möjliggörande av elevernas lärande av sammansatta bråk vid de andra tillfällena.

Alla tre lektioner utfördes efter första rasten (kl.10.00 – 11.00). Hade tidpunkten någon betydelse för hur eleverna agerade och hur pass aktiva de var eller inte var under lektionen? För att undvika att någon störde oss, elever och lärarstudenter, under lektionen sattes ett papper upp på dörren där det stod att vi utförde vår studie och att vi bad att få vara ifred under den tiden. Eleverna verkade inte påverkas av att de filmades under lektionen, eventuellt för att vi före lektionen förklarade att syftet var främst att dokumentera vad läraren sa och hur läraren agerade för att de skulle lära sig

sammansatta bråk. Däremot såg vi att när eleverna arbetade med gruppuppgiften hade de svårt att låta bli att påverkas av den externa mikrofonen. När den som filmade hade filmat var grupp och haft med sig den externa mikrofonen verkade eleverna slappna av efter några minuter och sedan ge sig i kast med att berätta hur de hade löst sin grupps problem. Några grupper kunde filmas när de var i färd med att lösa sina uppgifter, andra grupper hanns inte med och då fick de berätta om sina lösningar istället.

Eftertesten utfördes dagen efter att lektionen hade utförts. Vi kan inte annat än fundera över om resultatet skulle ha utmynnat i något annat om eftertestet hade utförts två eller fler dagar efter att lektionen hade genomförts. Det hade varit intressant att undersöka elevernas kunskaper även på lång sikt.

5.1.1 Lektionernas upplägg och dess genomförande

I vår teoretiska bakgrund framkommer vikten av att arbeta med konkreta och vardagsnära material och även med material med olika utseenden på helheten i flera sammanhang (McIntosh, 2009; Lamon, 2006). Detta har vi försökt använda oss av vid planeringen av våra lektioner. För att eleverna ska ha möjlighet att sätta innehållet i lektionen i ett sammanhang krävs det att innehållet inte ligger för långt bort från deras förförståelse (Claesson, 2009; Sträng & Dimenäs, 2000). Vid analys av lektion 1 upptäcktes att vi var onödigt konkreta genom att klippa isär alla delarna av cirkelarna och rektangelarna på lektionen. Mycket tid lades även ned på stambråk då eleverna i år fyra inte hade kommit i kontakt med bråk tidigare. Fokuseringen på den långa introduktionen av stambråk ledde till att eleverna inte var lika koncentrerade när vi väl kom till genomgången av sammansatta bråk. Klippningen av cirkelarna och rektangelarna visade sig vara tidskrävande och övertydligt så det momentet utslöts inför nästa lektion. Vid lektion 1 användes både stora cirklar, små cirklar och rektanglar, vilket även det visade sig vara tidskrävande och övertydligt, så till nästa lektion togs de små cirkelarna bort. Vi anar att möjligheterna för eleverna att lära sig sammansatta bråk minskades på grund av den långa presentationen av stambråk. Om vi hade känt eleverna sedan tidigare kanske vi skulle valt att genomföra studien med endast elever ur år fem och år sex för att undvika att odsla tid på redan kända moment för eleverna. En annan idé är att studien hade kunnat genomföras på olika skolor fast i samma årskurs. Då hade resultatet förmodligen sett annorlunda ut. Det kommer alltid att finnas elever i klassen med olika kunskapsnivåer. En del av läraryrkets komplexitet är att anpassa undervisningen utifrån de elever vi har framför oss i klassrummet. Då eleverna hade spridda förkunskaper upptäcktes flera kritiska aspekter som eleverna inte hade fått syn på för att de skulle kunna lära sig bråk. Detta gjordes dock först efter första förtestet och lektionen. De kritiska aspekterna avgränsades sedan till tre kritiska aspekter för att vi skulle ha möjlighet att kunna koncentrera oss mer på dessa.

Något som främjar elevernas lärande, tanke och handling är praktiska inslag i undervisningen då det praktiska inslaget skapar nyfikenhet och förståelse och gör att eleverna minns innehållet bättre (Claesson, 2009). Något som upptäcktes vid analysen av filmerna är att gruppsammansättningen vid gruppuppgiften med päronkorterna kan ha gjort att vissa elever inte har förstått bråk eller tagit till sig det som var tänkt. Vi valde att dela upp eleverna i kunskapsheterogena grupper, med tre-fyra elever i varje grupp, för att de med mer kunskaper skulle kunna hjälpa de elever som inte hade så mycket förkunskaper. Vid arbete i grupp skapas möjligheter för meningsutbyten mellan eleverna som kan gynna lärandet. Den ideala gruppstorleken är troligen tre-fyra

personer (Maltén, 1997; Sträng & Dimenäs, 2000). Vi upptäckte dock att de eleverna utan förkunskaper hade svårt att förstå innehållet i lektionen och istället sade att de förstod fastän de inte gjorde det. Frågan är om det hade fungerat bättre ifall eleverna hade arbetat parvis istället.

Vi tror att vi skulle ha kunnat använda oss av variationsteorin på ett bättre sätt. Vid analys av filmerna upptäcker vi att i lektionsuppläggen läggs mest fokus på att variera nämnaren och hålla täljaren konstant. Vi skulle troligtvis ha fokuserat på att variera täljaren lika mycket då täljarens betydelse är extra viktig för att förstå sammansatta bråk. Vid synliggörandet av nämnaren i genomgången av cirkelarna och rektangelarna skrevs bråktalen i en lodrät rad. Detta skulle vi även ha gjort med sammansatta bråk för att vara konsekventa och för att få eleverna att se ett tydligt mönster.

5.2 Resultatdiskussion

I resultatdiskussionen diskuteras vad i de olika lektionerna vi tror har påverkat elevernas resultat. Rubriker som har valts att diskutera utifrån är: för- och eftertestets utformning, oförändrat eller försämrat resultat, förbättrat resultat samt fortsatt forskning. Under dessa rubriker diskuteras varför vi tror att resultaten blev som de blev och vad som hade kunnats göra annorlunda.

5.2.1 För- och eftertestets utformning

I litteraturdelen har vi beskrivits hur viktigt det är att ta reda på elevernas förförståelse då eleverna skapar sin helhet mot bakgrund av sin förförståelse. Först när läraren har tagit reda på elevernas tidigare kunskaper kan lektionen planeras utifrån dessa förkunskaper (Claesson, 2009; Sträng & Dimenäs, 2000). Elevernas förkunskaper togs reda på genom ett förtest, men vi är något kritiska till vissa delar av det för- och eftertest som användes. Vid rättning av förtesten framkom det att ett antal elever hade svarat rätt på fråga 6 där eleverna skulle ringa in 1/3 av 9 kolor. Vid kompletterande intervjuer med dessa elever visade det sig att de inte alls hade förstått uppgiften då många har tittat på trean i 1/3 och ringat in tre kolor utan någon förståelse varför:

Elev: Jag tar bort ettan och sen tänker jag bara att det är tre.

Hade eleverna klarat uppgiften om det hade stått 1/3 av 12 istället, då det i detta fall skulle ha blivit fyra kolor istället för tre?

Vid rättning av uppgifterna upptäcktes även en del slarvfel av eleverna. Var testet otydligt? Vi tror att det ibland blev förvirrande för eleverna när det var flera moment att lösa i samma uppgift. Vid intervjuer med eleverna kom det fram att vissa elever hade svårigheter med att förstå vad de förväntades göra på vissa uppgifter i testet:

Lärare: Kan du förklara hur du har tänkt här? *Pekar på uppgift 6.*

Elev: *Eleven börjar läsa uppgiften...eller skulle man ringa in här då? A just det jag, jag kanske tänkte att, eller skulle man göra där? Pekar på svaret längre ner i uppgiften.*

Eleven ovan hade missat att ringa in kolorna på bilden och endast svarat 3 längre ned i uppgiften.

På uppgift 5 som lyder; Måla $\frac{1}{4}$ av rutan, har flera elever ritat exempelvis cirklar som de sedan delat upp i $\frac{1}{4}$. Var frågan otydligt ställd? Skulle ordet *av* ha markerats mer? Uppgifterna 9c och 10d som behandlar del av en helhet och del av ett antal var utformade på följande sätt: _ av 12 är _ respektive: _ av 6 är _. Dessa uppgifter kan ha missuppfattats och uppfattats vara svårare än vad de egentligen är. Då de bygger på att fylla i talen som fattas på strecken. Här syns ett tydligt tecken på att vi tror att eleverna förstår det vi förstår, men testet kan säkert tolkas på många olika sätt som syns i elevernas olika svar. Vi är medvetna om att resultatet kanske hade blivit på ett annat sätt om utformningen av för- och eftertesten sett annorlunda ut.

5.2.2 Oförändrat eller försämrat resultat

Eleverna i A- och B-gruppen har även på eftertestet svårigheter med sammansatta bråk vid uppgift 7 och 8 vilket vi förmodar beror på att eleverna inte erhållit förståelse för nämnaren och täljarens betydelse. Efter att ha analyserat de videoinspelade lektionerna en andra gång märktes att detta inte framkom så tydligt som var önskvärt. Vid genomgången av gruppuppgifterna med päronkortet i lektion 2 försöker läraren tydliggöra för eleverna varför de olika delarna kallas som de gör. Om vi ska vara kritiska till om detta framkom till eleverna eller inte såg vi på videoupptagningen att läraren var otydlig i sitt kroppsspråk. När läraren visar två tredjedelar och säger två av tre pekar hon endast med handen över de två tredjedelarna utan att visa att det är två delar av tre delar. Samma sak när hon visar $\frac{1}{3}$ och säger en av tre pekar hon endast över den delen utan att visa att det är en del av tre delar. Det kan då bli oklart för eleverna vad helheten är. Vi tror även att det hade blivit tydligare om läraren hade sagt två delar av de tre delarna istället för endast säga två av tre.

Vid jämförelse av elevernas för- och eftertest har det framkommit att ett antal elever inte har förändrat sig alls inom vissa uppgifter, framförallt i uppgift 7 och 8. Svarade de fel på förtestet gjorde de exakt samma fel i eftertestet också. Frågan är om de kommer ihåg hur de tänkte i förtestet och tror att de har tänkt rätt där och därmed gör samma sak i eftertestet också. Om de nu tror att de har rätt tänk kan det vara svårt för dem att ändra sitt tänk trots att läraren säger annorlunda på lektionen. Därför är det viktigt att på lektionen vid upprepande tillfällen och med varierande arbetssätt belysa det som eleverna ämnar lära sig.

På lektion 3 fick en elev svara på följande:

Lärare: Bra, ha, nu har vi delat den stora cirkeln i fyra delar, eller hur? Vad betyder fyran nu då?
Vad säger du?
Elev: En hel är delad i fyra.
Lärare: En hel är delad i fyra delar, det är det som fyran talar om men vad betyder ettan då? Vad säger du?
Elev: Eh, [ohörbart]
Lärare: Vad sa du?
Elev: En hel.
Lärare: Näe, ettan betyder något annat, vad var det nu ettan betydde? (flicknamn)
Elev: Att det är en av de fyra delarna.
Lärare: Precis, ettan betyder att det är en, det här är en fjärdedel, för det är en del av fyra delar, ok? Så det här är en fjärdedel. Det är en fjärdedel. Det här är en fjärdedel. Och det är en fjärdedel.

Eleven som svarade *en hel* svarade då fel, men det kanske var nödvändigt för henne att göra det för att ha möjlighet att tänka på ett nytt sätt. Om en elev sitter och tror att han eller hon kan det som läraren går igenom lyssnar säkerligen inte eleven helt. I litteraturdelen har vi skrivit om vikten av att läraren har ett samspel med eleverna. För att förlösa kunskapen hos eleverna krävs det att läraren har tänkt igenom sättet som frågorna ställs på. Eleven kan genom ett samtal få syn på nya kunskaper som han eller hon inte var medveten om att han eller hon hade innan samtalet (Claesson, 2009; Sträng-Haraldsson, 1995). En annan förklaring till att eleverna svarar samma på för- och eftertestet kan vara att eleven i fråga inte kan koppla eftertestet till det som gjordes på lektionen. Har eleven då enbart haft möjlighet till en ytinläring istället för en djupinläring? Om eleven har kunnat urskilja en helhet samt förstått ett sammanhang utifrån innehållet får eleven en djupare kunskap. Om eleven istället endast memorerar innehållet utantill utan reflektion tillägnar sig endast han eller hon en ytligare kunskap (Claesson, 2009; Maltén, 1997).

På vissa uppgifter fick eleverna ett sämre resultat på eftertestet än på förtestet. Vad kan detta bero på? Har vi rört till det mer genom lektionsupplägget? Vid filmanalysen av lektion 2 upptäcktes att det blev förvirrande för eleverna vid lärarens försök att tydliggöra att alla delar måste vara lika stora i bråk. Vid ett tillfälle när läraren sätter en femtedel vid de fyra fjärdedelarna säger en elev att det blir en hel och en femtedel vilket faktiskt stämmer då hon visste att den svarta delen var en femtedel. Detta uppfattade inte läraren och fortsatte tala om att delarna måste vara lika stora. Se exemplet nedan:

Lärare: Om jag sätter den här delen där då. *Sätter en svart del efter de blåa fjärdedelarna. Vad kallas den delen Pekar på den svarta delen.* (flicknamn)
Elev: En femtedel.
Lärare: En femtedel säger du.
Elev: Ja, men, när de är tillsammans så blir de en hel och en femtedel.
Lärare: Är den lika stor som den? *Läraren sätter en femtedel på en fjärdedel*
Elev: näe.
Lärare: Får jag säga att det är en femtedel då?
Elev: hmm.
Lärare: Även fast det är fem delar här? Det får jag inte va?
En elev vänder sig till den eleven som läraren pratar med och säger nej lågt och skakar på huvudet, eleven som läraren pratar med skakar också på huvudet.

Detta kan ha förvirrat eleverna och en sådan sak kan leda till att de inte förstår lärandeobjektet. Detta är ännu ett exempel på att läraren inte alltid förstår det eleven förstår.

Tempot på lektionen kan också ha påverkat elevernas möjlighet att lära. På lektion 1 och 2 var tempot relativt lågt och det hände inget oförutsett. De olika momenten såsom att klippa alla delar och även sätta på häftmassa tog lång tid. Inför lektion 2 togs klippmomentet bort men häftmassan sattes fortfarande upp på de olika delarna under lektionen. Inför lektion 3 hade vi förberett oss genom att redan innan lektionen fäst fast häftmassan på delarna så att ett tempo kunde hållas. På så vis kan elevernas intresse lättare hållas vid liv, vilket kan leda till att de är mer mottagliga till lärandeobjektet.

5.2.3 Förbättrat resultat

Vid analys av eftertesten efter lektion 1 upptäcktes vissa förbättringar, dock inte märkbart inom sammansatta bråk vilket tyder på att eleverna fortfarande har bristande förståelse för täljaren och nämnarens betydelse. Märkbara förbättringar efter lektion 1 syntes på uppgift 9a, 9c samt 10d. Efter en andra analys av filmen anar vi att anledningen till att eleverna i A-gruppen hade förbättras inom just dessa uppgifter var att läraren använde sig av samma sätt att skriva vid redovisningen av uppgifter med päronkort som det var i för- och eftertesten; ___ av 12 är ___. Eleverna kunde då koppla detta till det de gjorde på lektionen.

Den i överlag jämna ökningen på elevernas resultat i C-gruppen (se bilaga 3) tyder på att eleverna har förstått nämnaren och täljarens betydelse. Detta har att göra med att lärare 3 frågar eleverna kontinuerligt under lektionen vad täljaren representerar och likaså vad nämnaren betyder samtidigt som hon, vilket vi har sett på videoupptagningen från lektionen, pekar på nämnaren och täljaren i respektive ordning. Genom denna kontrast ges eleverna möjlighet att urskilja täljaren och nämnarens betydelse samtidigt. Vi har även noterat att läraren under lektionen frågar eleverna om betydelsen under flera tillfällen för att få alla elever att förstå hur sammansatta bråk fungerar, se exemplet nedan:

- Lärare: För att de skulle ha sjättedelar var det va? Precis. De behövde dela tolv päron i sex delar först och vad var det tvåan betyder nu då? Som vi pratade om förut? Vad betyder tvåan? (pojknamn)
- Elev: Två stycken.
- Lärare: De behöver ha två, njae, de skulle ha två delar av de sex delarna, eller hur? Så två delar av sex delar och de började med tolv, eller hur?

5.3 Studiens slutsats

Det som är avgörande för elevernas lärande av bråk är att läraren kontrasterar täljaren och nämnaren mot varandra. Detta var något som varken lärare 1 eller lärare 2 åstadkom i samma utsträckning som lärare 3. Genom denna kontrastering lyckades fler elever urskilja täljaren och nämnarens betydelse. Efter den tredje lektionen upptäcktes även att tydligheten i lärarens kroppsspråk bidrog till att fler elever kunde förstå lärandeobjektet. Kontrasteringen skedde genom att läraren vid upprepande tillfällen pekade på täljaren respektive nämnaren under lektionens gång och frågade samtidigt; vad betyder ettan (när det gällde $1/3$) och vad betyder trean? Vi tror att den avgörande kritiska aspekten var just täljaren och nämnarens betydelse och genom att synliggöra dessa som en röd tråd genom lektionen fångades fler elever och de fick en djupare förståelse kring bråk. Eleverna kan lära sig att när de ska dela en pizza i fyra delar kallas varje del $1/4$ fast de kanske inte vet varför varje del kallas på ett visst sätt. Avgörande för mer avancerade uppgifter är att eleverna får förståelse för täljaren och nämnarens betydelse. Med detta vill vi poängtera:

Kontrastera mera!

5.4 Fortsatt forskning

Inför framtida forskning vore det intressant att genomföra en liknande studie på en liknande elevgrupp för att se om resultatet kan bli jämförande. Det vore även intressant att genomföra en liknande studie men under en längre tidsperiod för att kunna

genomföra en grundligare analys av videoupptagningarna samt av elevernas för- och eftertest. Om studien hade pågått under en längre tidsperiod hade även möjlighet funnits att undersöka vad eleverna lärt sig på längre sikt. Den här studien har bidragit till att vi på framtida arbetsplatser i skolan kommer att använda oss av variationsteorin som en god teoretisk utgångspunkt i vårt dagliga arbete med elever, innehåll och metod.

Referenser

- Bell, J. (2006). *Introduktion till forskningsmetodik*. Lund: Studentlitteratur.
- Claesson, S. (2009). *Lärares hållning*. Lund: Studentlitteratur.
- Gustavsson, L. & Wernberg, A. (2006). Design experiment, lesson study och learning study. I: M. Holmqvist (red.) *Lärande i skolan: learning study som skolutvecklingsmodell* (s. 29-50). Lund: Studentlitteratur.
- Holmqvist, M. (2006). Att teoretisera lärande. I: M. Holmqvist (red.) *Lärande i skolan: learning study som skolutvecklingsmodell* (s. 9-27). Lund: Studentlitteratur.
- Kilborn, W. (1999). *Didaktisk ämnesteor. Matematik del 2*. Stockholm: Liber AB.
- Kwok, W.Y. & Chik, P.P.M. (2005). The Effect of Learning Studies on Student Learning Outcomes. I: M.L. Lo, W.Y. Pong & P.M.P. Chik (red:er), *For each and everyone. Catering for individual differneces through learning studies*. (s. 9-26). Hong Kong: University Press.
- Lo, M.L. & Pong, W.Y. (2005). Catering for Individual Differences: Buildning on Variation. I: M.L. Lo, W.Y. Pong & P.M.P. Chik (red:er), *For each and everyone. Catering for individual differneces through learning studies*. (s. 9-26). Hong Kong: University Press.
- Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur.
- Maltén, A. (1997). *Pedagogiska frågeställningar*. Lund: Studentlitteratur.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- McIntosh, A. (2009). *Förstå och använd tal - en handbok*. Göteborg: NCM Nationellt centrum för matematikutbildning.
- Patel, R. & Davidson, B. (2003). *Forskningsmetodikens grunder*. Lund: Studentlitteratur.
- Runesson, U. (2008). Learning to design for learning. The potential of Learning Study to Enhance Teachers´ and Students´ Learning. I: P.Sullivan & T.Wood (red:er), *The international Handbook of Mathematics Teacher Education* vol. 1. Rodderdam, NL: Sense Publications.
- Rönnerman, K. (2004). Vad är aktionsforskning? I: K.Rönnerman (red.), *Aktionsforskning i praktiken* (s. 13-29). Lund: Studentlitteratur.
- Skolverket (2009). Kursplan med kommentarer till mål som eleverna lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i ämnena matematik, svenska och svenska som andraspråk. [Online]. Tillgänglig: <http://www.skolverket.se/publikationer?id=2142>. (2009-12-09).

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The free Press

Sträng, M. & Dimenäs, J. (2000). *Det lärande mötet*. Lund: Studentlitteratur

Sträng-Haraldsson, M. (1995) Att själv välja väg för lärandet. I: B. Lendahls & U. Runesson (red:er), *Vägar till elevers lärande* (s. 16-29). Lund: Studentlitteratur.

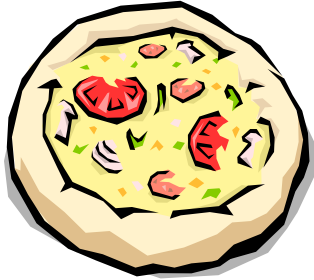
Trost, J. (2002). *Att vara opponent*. Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet. (2009) Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Tillgänglig på Internet:
<http://www.vr.se/download/18.668745410b37070528800029/HS%5B1%5D.pdf> Hämtad [09.09.17].

Bilaga 1 - För- och eftertest

Namn:

1. Detta är en pizza:



Måla en halv pizza

2. Fyra kompisar delar lika på den här pizzan

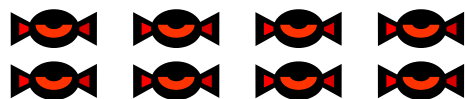


a) Rita hur stor del var och en får

b) Vad kallas en sådan del? Skriv med bokstäver _____

c) Hur skriver man detta med siffror? _____

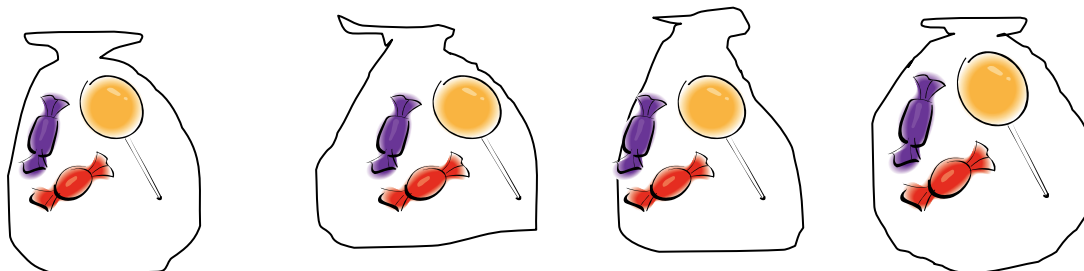
3. Två personer delar kolorna lika.



a) Visa på bilden hur många varje person får.

b) Varje person får _____ kolor

4. Mamma har gjort i ordning godispåsar till sina barn. De såg ut så här:



a) Hur många barn har delat på godiset? _____

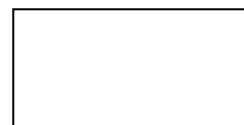
b) Hur många godisar får varje barn? _____

c) Hur många godisar fanns det från början? _____

5.
Vad står det här? Skriv med bokstäver

$\frac{1}{4}$ _____

Måla $\frac{1}{4}$ av rutan



$\frac{1}{2}$ _____

Måla $\frac{1}{2}$ av rutan



$\frac{1}{3}$ _____

Måla $\frac{1}{3}$ av rutan



$\frac{2}{4}$ _____

Måla $\frac{2}{4}$ av rutan



$\frac{2}{3}$ _____

Måla $\frac{2}{3}$ av rutan



Namn:

6.



David har 9 kolor. Ringa in $\frac{1}{3}$ av kolorna.

$\frac{1}{3}$ av 9 är ____ stycken

7.



Lisa har fått 6 presenter på sin födelsedag. Ringa in $\frac{2}{3}$ av presenterna

$\frac{2}{3}$ av 6 är ____

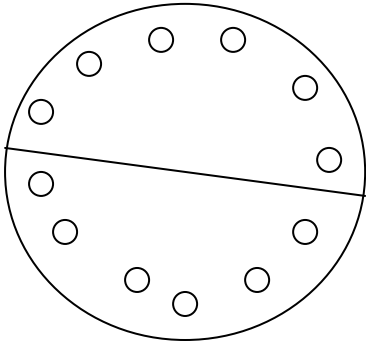
8.



Det finns 10 äpplen i en korg. Ringa in $\frac{3}{5}$ av äpplena.

$\frac{3}{5}$ av 10 är ____

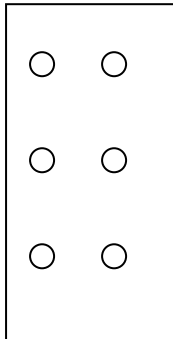
9. Detta är Pelles födelsedagstårta



- a) Tårtan är delad i två lika stora delar.
Varje del är _____ av hela tårtan.
- b) De finns 12 jordgubbar på tårtan. Hälften
av alla jordgubbarna är _____
- c) Fyll i talen som fattas så att det stämmer

_____ av 12 är _____

10. Stina vill dela en chokladkaka med sina kompisar.



- a) Dela chokladkakan i 3 lika stora
delar.
- b) Varje del är _____ av
chokladkakan.
- c) Det finns 6 nötter i
chokladkakan. En tredjedel av
alla nöterna är _____
- d) Fyll i talen som fattas så att det
stämmer

_____ av 6 är _____

Bilaga 2 – Tillstånd av vårdnadshavare



Till föräldrar i klass

Datum

Den svenska skolan är i dag uppmärksamrad på olika sätt. Inte minst har svenska elevers kunskaper och möjligheter att lära sig stått i fokus och diskuterats.

Undertecknade går nu sin examenstermin i lärarutbildningen vid högskolan i Skövde. Ett av utbildningens syften är att göra lärare bättre skickade att utföra sitt arbete och att förbättra elevernas lärande i matematik.

För att utveckla både oss och eleverna, behöver vi studera vår egen undervisning och elevernas lärande lite närmare. Ett sätt att göra detta är att göra videoinspelningar i klassrummet för att kunna analysera lärarens undervisning och elevernas möjlighet att lära ett särskilt innehåll. För att få videofilma lektioner, måste vi emellertid ha föräldrars/målsmans tillstånd. De inspelade lektionerna kommer endast att användas i studiesyfte och kommer bara att ses av oss samt våra handledare i kursen. Banden kommer att raderas efter att kursen är avslutad.

Vi hoppas att ni vill ställa upp på denna undersökning som är viktig för att ge kunskap om hur vi kan förbättra undervisningen så att fler elever finner skolarbetet roligt och värdefullt- och lär sig mera.

Välkommen med frågor om det är något du undrar över!

Vänliga hälsningar,

Jenny Dahlgren, Anna Johansson och Malin Magnehed.

Lämna in nedanstående snarast till skolan.

Learning Study – En modell för utvecklingsarbete direkt i klassrummet.

Tillstånd ang. videofilmning i klassrummet under en lektion i matematik / svenska / no

- Jag ger tillstånd till att mitt barn får filmas under en lektion och att den filmen får visas i syfte att analysera lärarens undervisning. Läraren ansvarar för filmen.
- Jag ger inte tillstånd till att mitt barn filmas.

Elevens namn: _____ klass: _____

Målsmans underskrift: _____

Bilaga 3 - Procenttabell över elevernas resultat i för- och eftertesten

	Förtest 1	Eftertest 1	Skillnad i procentenhet	Förtest 2	Eftertest 2	Skillnad i procentenhet	Förtest 3	Eftertest 3	Skillnad i procentenhet
1	100%	100%	0	100%	100%	0	100%	100%	0
2a	100%	100%	0	100%	100%	0	98%	100%	2
2b	98%	91%	-7	100%	82%	-18	94%	100%	6
2c	79%	89%	10	53%	88%	35	83%	94%	11
3a	98%	100%	2	100%	100%	0	100%	100%	0
3b	100%	100%	0	100%	100%	0	100%	100%	0
4a	100%	100%	0	100%	100%	0	100%	100%	0
4b	100%	100%	0	100%	100%	0	98%	100%	2
4c	100%	100%	0	89%	94%	5	98%	100%	2
5a	83%	94%	11	75%	86%	11	72%	100%	28
5b	81%	94%	14	71%	88%	17	72%	94%	22
5c	72%	76%	4	75%	86%	11	72%	100%	28
5d	61%	67%	6	76%	82%	6	61%	83%	22
5e	61%	61%	0	76%	82%	6	61%	78%	18
6	65%	81%	16	67%	82%	15	70%	89%	19
7	46%	50%	4	47%	57%	10	39%	63%	24
8	39%	48%	9	47%	59%	12	39%	59%	20
9a	74%	94%	20	94%	88%	-6	87%	100%	13
9b	83%	100%	17	100%	100%	0	89%	93%	4
9c	39%	70%	31	45%	59%	14	50%	56%	6
10a	85%	96%	11	92%	98%	6	87%	94%	7
10b	78%	93%	15	76%	71%	-5	76%	89%	13
10c	76%	78%	2	59%	82%	23	78%	89%	11
10d	39%	67%	28	51%	53%	2	48%	54%	6

Färgförklaringar:

Cerise = 100 % både på för- och eftertest

Gul = Märkbar förbättring 10 procentenheter och uppåt

Grön = Svag förbättring 0-9 procentenheter

Turkos = Försämring